Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento: Matemáticas

Tipo de Actividad: Asignatura

Créditos: 4 por semestre

Nombre: Topología Métrica (Mat 312)

Intensidad Horaria: 4 h.s.

Requisitos: Mat 202 y Mat 251 o Mat 151

DESCRIPCIÓN

De acuerdo con [Sim, p. 50], "en muchas ramas de la matemática—en geometría así como en análisis—se ha encontrado que es extremadamente conveniente contar con una noción de distancia que sea aplicable a los elementos de conjuntos abstractos". En efecto, ocurre, por ejemplo, que varias estructuras elementales del Cálculo, como R, R^2, R^3 y, en general, R^k presentan ciertos rasgos comunes, en particular nociones de distancia que gradualmente se van generalizando con el aumento de la dimensión de la estructura. No sólo las nociones de distancia mencionadas se identifican como rasgos comunes sino también lo que se hace con ellas. Así, el concepto geométrico de *esfera* puede ser formulado analíticamente en todas estas estructuras de tal manera que la esfera *n*-dimensional es una abstracción bastante natural de la esfera tridimensional euclidiana. La proliferación de este tipo de estructuras, esto es conjuntos dotados de nociones de distancia, en las que se observan construcciones con comportamientos similares, conduce naturalmente, mediante abstracción, al concepto de *espacio métrico*. Un espacio métrico es, informalmente, un conjunto abstracto dotado de una noción técnica de distancia.

Una cierta clase de nociones, que también son rasgos comunes de las estructuras en cuestión, pretenden formalizar ideas intuitivas sobre *posición* como, por ejemplo, las nociones de *punto interior*, *punto exterior* y *punto de frontera* las cuales constituyen una descripción matemática, en el contexto de los espacios métricos, de las tres posibles posiciones que puede ocupar un punto con relación a un conjunto. Si se atiende a la etimología de la palabra *topología* (*topos*, lugar, *logos*, ciencia) parece razonable llamar a las tres mencionadas, nociones *topológicas*. Consecuentemente, la *Topología* sería el estudio de las nociones topológicas. La realidad es que la Topología estudia nociones más complejas en cuya descripción intervienen, como ingredientes fundamentales, las nociones topológicas más elementales como las tres anteriormente indicadas. Así, por ejemplo, las nociones de *conjunto abierto*, *conjunto cerrado*, *conjunto compacto*, y *conjunto conexo* son características de la topología. No obstante, la noción que parece desempeñar el papel protagónico en la Topología es la de *función continua*.

Ahora bien, un esfuerzo de abstracción adicional, muestra que la noción de espacio métrico puede ser generalizada a una noción de estructura topológica independiente de la noción de distancia. Esta estructura se denomina *espacio topológico*. La investigación de las nociones que son características del contexto de los espacios topológicos (en especial la noción de función continua) constituye lo que se denomina *Topología General*. El término *Topología Métrica* hace referencia entonces a la topología que se desarrolla en el ambiente particular de los espacios métricos.

La Topología General es, al lado del Álgebra Abstracta y el Análisis Matemático, una de las tres grandes áreas consideradas básicas de la Matemática. Esto significa que el conocimiento de estas tres áreas es requisito indispensable para comprender y profundizar en temas avanzados de la Matemática actual. En este orden de ideas, la Topología Métrica puede mirarse como una antesala de la Topología General: El estudio de la Topología Métrica prepara el terreno, proporciona motivación adecuada y facilita el paso al nivel superior de abstracción propio de las ideas de la Topología General.

Entre otras, algunas de las ventajas que se logran con el proceso de abstracción descrito son, por una parte, la posibilidad de reunir, en una exposición unificada y amplia una gran cantidad rasgos comunes de estructuras importantes, eliminando, de paso, aspectos particulares superfluos, y, por otra, la oportunidad de aumentar el campo de visión de la teoría, aislar la esencia de las ideas consideradas importantes y obtener economía de pensamiento.

Una de las tendencias actuales en la presentación del Análisis Matemático es la de desarrollarlo lo más tempranamente posible en el ámbito topológico de los espacios métricos (por ejemplo, [Apo *a*], [Rud] y [Sim]). Esto está justificado si se tiene en cuenta el panorama del Análisis moderno cuyas metas de mayor alcance se inscriben en el marco de ciertas clases de espacios métricos (espacios de Hilbert, de Banach, etc.) Desde este otro punto de vista, la Topología Métrica puede ser entonces considerada como parte de los fundamentos necesarios para abordar el Análisis Matemático.

OBJETIVO GENERAL

Presentar y formalizar algunos conceptos abstractos del análisis en el contexto de espacios métricos como por ejemplo función continua, convergencia de sucesiones, conjunto compacto, conjunto conexo, etc.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Fortalecer en los estudiantes el rigor matemático en el desarrollo de ciertos conceptos abstractos de la matemática.
2. Generalizar el concepto de distancia y desarrollar algunos conceptos topológicos tan importantes como función continua, conjunto abierto, conjuntos cerrados, conjuntos compactos en espacios métricos.
3. Utilizar teoremas de caracterización en espacios métricos para generalizar algunos resultados del calculo y el análisis.

CONTENIDO

CAPÍTULO I CONJUNTOS CONTABLES.

1.1 Conjuntos finitos e infinitos, infinitos contables y no contables
1.2 La no contabilidad de R.
1.3 La contabilidad de Q.
1.4 Criterios de contabilidad.

CAPÍTULO II ESPACIOS MÉTRICOS.

2.1 Métricas, Espacios métricos. Ejemplos de espacios métricos. R, R^k, C, C^n con métricas usuales y con algunas otras métricas.
2.2 Espacios métricos discretos; Otros ejemplos importantes como $C[0,1]$, H (espacio de Hilbert o l_2-espacio), I (el cubo de Hilbert) y C (el espacio de Cantor).
2.3 Distancia de un punto a un conjunto. Distancia de un conjunto a otro conjunto.
2.4 Diámetros.
2.5 Bolas abiertas en espacios métricos.
2.6 Subespacios métricos.
2.7 Bolas abiertas en subespacios métricos. Isometrías.

CAPÍTULO III TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

3.1 Puntos interiores. Puntos exteriores. Puntos de frontera. Puntos adherentes. Puntos de acumulación. Puntos aislados. Interior. Exterior. Frontera. Adherencia. Derivado.
3.2 Conjuntos abiertos. Caracterización de los abiertos por interiores. Estructura de los abiertos en R.
3.3 Conjuntos cerrados. Estructura de los cerrados en R. Caracterizaciones de los cerrados por adherencias, por derivados.
3.4 Propiedad de Bolzano-Weierstrass. Conjuntos acotados. Teorema de Bolzano-Weierstrass.
3.5 Recubrimientos. Recubrimientos abiertos, finitos, contables.
3.6 Teorema de encaje de Cantor.
3.7 Conjuntos densos en ninguna parte.
3.8 Teorema de Baire.

3.9 Propiedades de contabilidad en espacios métricos.
3.10 Teoremas de Lindelöf. Espacios de Lindelöf.
3.11 Propiedades de separación.
3.12 Conjuntos compactos.
3.13 Teorema de Heine-Borel.
3.14 Estructura de los compactos en R^k.
3.15 Conjuntos conexos. Teorema de descomposición en componentes conexas. Estructura de los conexos en R.
3.16 Estructura de los conexos en R^k .

CAPÍTULO IV SUCESIONES EN ESPACIOS MÉTRICOS

4.1 Sucesiones en espacios métricos: Sucesiones acotadas, Subsucesiones, Sucesiones convergentes.
4.2 Límites de sucesiones convergentes.
4.3 Sucesiones convergentes en subespacios.
4.4 Relación entre convergencia de sucesiones y convergencia de subsucesiones.
4.5 Acotabilidad de las sucesiones convergentes.
4.6 Sucesiones de Cauchy. Condición de Cauchy.
4.7 Sucesiones de Cauchy en subespacios.
4.8 Relación entre la condición de Cauchy para sucesiones y la condición de Cauchy para subsucesiones.
4.9 Acotabilidad de sucesiones de Cauchy.
4.10 Relación entre sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy.
4.11 Espacios completos.
4.12 Sucesiones en R, en R^k y en C.
4.13 Completitud de R^k y C

4.14 Caracterizaciones de la compacticidad mediante la compacticidad secuencial y la compacticidad contable.
4.15 Sucesiones de funciones de un conjunto a un espacio métrico.
4.16 Convergencia puntual y convergencia uniforme.

CAPÍTULO V LÍMITES EN ESPACIOS MÉTRICOS

5.1 Límites de funciones de espacios métricos en espacios métricos. Relación entre límites de funciones y límites de sucesiones.
5.2 Funciones reales. Álgebra de límites de funciones reales. (Comportamiento de los límites con respecto a la suma, resta, producto y cociente de funciones reales.)
5.3 Funciones complejas. Partes real e imaginaria de una función compleja. Álgebra de límites de funciones complejas (Comportamiento de los límites con respecto a la suma, resta, producto, cociente y partes real e imaginaria de funciones complejas.)
5.4 Funciones vectoriales (euclídeas). Álgebra de límites de funciones vectoriales. (Comportamiento de los límites con respecto a la suma, resta, productos interno y vectorial, y componentes de funciones vectoriales.)

CAPÍTULO VI CONTINUIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

6.1 Continuidad local de funciones de un espacio métrico en otro espacio métrico.
6.2 Continuidad local en subespacios.
6.3 Caracterización de la continuidad local por límites y por sucesiones convergentes.
6.4 Álgebra de continuidad local. (Comportamiento de la continuidad local con respecto a la suma, resta, producto, cociente, partes real e imaginaria, componentes, composición e inversión.)
6.5 Teorema de la conservación del signo para funciones continuas.
6.6 Imágenes directas e inversas.
6.7 Continuidad global. Caracterización de la continuidad global por imágenes inversas de abiertos (resp. cerrados).
6.8 Relación entre continuidad global y compacticidad: imágenes directas de compactos por funciones continuas.
6.9 Relación entre continuidad global y conexidad: imágenes directas de conexos por funciones continuas.
6.10 Extensión a espacios métricos de algunos teoremas importantes sobre continuidad global de funciones reales de valor real: continuidad de inversas, acotación sobre compactos, valores extremos, de Bolzano y del valor intermedio.
6.11 Teorema de extensión de Tietze. Homeomorfismos.
6.12 Continuidad uniforme. Relación entre continuidad uniforme y continuidad global.
6.13 Continuidad y convergencia uniforme.
6.14 Contracciones. Puntos fijos. Teorema del punto fijo para contracciones.
6.15 Teorema de Heine.
6.16 Funciones a dos valores.
6.17 Caracterización de la conexidad mediante funciones a dos valores.
6.18 Tratamiento alternativo de la conexidad mediante funciones a dos valores.

METODOLOGÍA

El curso se puede desarrollar a través de tres (3) horas expositivas semanales del profesor y una (1) hora semanal de taller en la cual se resuelvan dudas sobre la teoría y sobre los talleres y problemas propuestos por el profesor, bien sea del texto guía o de problemas entregados por él en forma separada. Asi mismo, el profesor podrá sugerir exposiciones a los estudiantes.

EVALUACIÓN

El tipo de evaluación y la respectiva ponderación deben ser concertadas, el primer día de clase, con los estudiantes y teniendo en cuenta el reglamento estudiantil de la universidad del Cauca.

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático.* Segunda edición. Reverté, Barcelona, 1976.
2. Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*. Segunda edición. Wiley, New York, 1975.
3. Gelbaum, B. R. & Olmsted, J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. Holden-Day, San Francisco, 1964.
4. Lipschutz, S., *Theory and Problems of General Topology*. Serie Schaum. McGraw-Hill, Singapore, 1965.
5. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. Tercera edición. McGraw-Hill, Auckland, 1976.
6. Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, Auckland, 1964.
7. Spivak, M., *Cálculo Infinitesimal.* Segunda edición. Reverté, Barcelona, 1992.
8. Takeuchi, Y., *Análisis Matemático*. Universidad Nacional de Colombia, Santa Fe de Bogotá, 1974.
9. Takeuchi, Y., *Sucesiones y Series*. Tomo I. Universidad Nacional de Colombia, Santa Fe de Bogotá, 1971.
10. Willard, S., G*eneral Topology*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.