

Métodos secantes de cambio mínimo para el cálculo de ceros de funciones de matrices

Eduard Mauricio Macías Caicedo

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Maestría en Ciencias Matemáticas
Popayán
2013

Métodos secantes de cambio mínimo para el cálculo de ceros de funciones de matrices

Eduard Mauricio Macías Caicedo

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas

Directora

Dra. Rosana Pérez Mera
Profesora de la Universidad del Cauca

Codirector

Dr. Héctor Jairo Martínez Romero
Profesor de la Universidad del Valle

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Maestría en Ciencias Matemáticas
Popayán
2013

Nota de aceptación

Director: **Dra. Rosana Pérez Mera**

Jurado: **Dr. Manuel María Villegas Lerma**

Jurado: **Dr. Ramiro Miguel Acevedo Martínez**

Popayán, 13 de diciembre de 2013

AGRADECIMIENTOS

A Dios, esa fuerza superior, ese ser omnipotente, quien me regaló mi familia y cada amanecer y sobre todo, quien me regala el entendimiento para realizar cada reto de vida.

A mi Madre, quien siempre esta pendiente de encomendarme en sus oraciones y de pedir por mí.

A mi Padre, por proporcionarme su apoyo y su fe.

A mi hermana por su apoyo y su amistad.

A mi otra familia por sus oraciones y su gran apoyo.

A mi amada esposa por su infinita paciencia, por su inagotable apoyo, por su tierna compañía, por compartir mi vida y mis logros.

A mi directora de tesis Dra. Rosana Pérez por brindarme una oportunidad, por su dedicación constante, conocimientos, orientación, paciencia, confianza depositada en mí y porque en muchas oportunidades el tiempo transcurre rápidamente, pero descubres que no sólo hay conocimiento, sino lazos de amistad y personas de gran calidad humana. Gracias por brindarme todos estos valiosos detalles que me llevaron a la culminación de este gran trabajo.

A mi codirector Dr. Héctor Jairo Martínez por sus valiosos aportes y apreciables asesorías que han aportado grandes beneficios para la realización de esta investigación.

Al los Doctores Manuel Villegas y Ramiro Acevedo quienes con sus sugerencias y re-

comendaciones acertadas producto de su gran nivel académico e investigativo, dan más peso a este trabajo.

Al Mg. Mario Patiño por su invaluable asesoría sobre algunas aplicaciones en la Física.

Al Mg. Favián Arenas por sus grandes e importantes aportes a lo largo y ancho de este trabajo y por su amistad sincera.

A mis colegas del Departamento de matemáticas por su apoyo, en especial a mi compañero, compadre y excelente amigo Hevert Vivas.

A todas las personas que de alguna u otra manera contribuyeron a la realización de este trabajo.

Eduard Mauricio Macías Caicedo
Diciembre de 2013

TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción	1
2. Sistemas de ecuaciones no lineales	4
3. Algoritmo y teoría de Convergencia	13
3.1. Hipótesis	15
3.2. Resultados de convergencia	16
4. Pruebas Numéricas	27
4.1. El problema de los valores propios cuadrático	28
4.2. Algoritmos	31
4.3. Pruebas numéricas	34
5. Comentarios finales	40

ÍNDICE DE FIGURAS

4.1. <i>Sistema masa-resorte amortiguador conectado.</i>	36
4.2. <i>Valores propios del Problema 3 para algunos valores de n.</i>	39

ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Problema 1 usando el Algoritmo 4.2.	34
4.2. Problema 2 usando el Algoritmo 4.2.	35
4.3. Problema 3 usando el Algoritmo 4.2.	37

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Una función de variable y valor matricial,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ A &\longmapsto F(A), \end{aligned}$$

es llamada una *función de matrices*. Este tipo de funciones ha sido estudiado desde hace mucho tiempo; de hecho, *Cayley* (1858), en su obra *A Memoir on the Theory of Matrices*, investiga la raíz cuadrada de una matriz y, posteriormente, *Sylvester* y otros autores dieron una definición formal de una función de matrices [25].

Higham (2008), en su libro *Functions of matrices theory and computations* [25], presenta una recopilación de su trabajo de investigación a lo largo de muchos años sobre funciones de matrices, el cual incluye métodos numéricos para resolver problemas que las involucran, así como una descripción general de aplicaciones en las cuales surgen las funciones de matrices. Para desarrollar la teoría, el autor emplea tres definiciones equivalentes de funciones de matrices a partir de la *forma canónica de Jordan*, el *polinomio interpolante* y la *fórmula integral de Cauchy*, respectivamente. Además, basado en la *derivada Fréchet* de una función de matrices, hace un tratamiento sobre la sensibilidad de problemas asociados a dichas funciones.

Son numerosas las áreas en ciencia e ingeniería en las que aparecen problemas relacionados con funciones de matrices; por ejemplo, en ecuaciones diferenciales, modelos de

Markov, teoría de control, resonancia nuclear magnética, entre otros [25]. Las investigaciones en funciones de matrices involucran teoría de matrices, análisis numérico, teoría de aproximación y el desarrollo de algoritmos y software [25].

En gran parte, el desarrollo de una teoría sobre funciones de matrices ha sido motivado en la necesidad de resolver ecuaciones matriciales no lineales. Dos ejemplos de este tipo de ecuaciones con una gran variedad de aplicaciones [25] son, la llamada *ecuación de Riccati* [4][34]

$$XFX - A^*X - XA - G = \mathbf{O},$$

donde A^* denota la transpuesta conjugada de A , F y G , son *hermitianas* y la *ecuación cuadrática matricial* [26][24]

$$AX^2 + BX + C = \mathbf{O},$$

donde $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Esta ecuación es una generalización de la ecuación cuadrática escalar.

Por otra parte, el gran interés en *problemas de valores propios no lineales* ($F(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{O}$, con $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ es una función de valor matricial dada y $\lambda \in \mathbb{C}$) ha motivado diversas propuestas de problemas matriciales no lineales que sirven como *problemas de prueba* para nuevas propuestas algorítmicas. En efecto en [3], se presenta una colección de 52 problemas, algunos de los cuales han sido construidos a partir del modelamiento de aplicaciones de la vida real y otros específicamente para tener propiedades particulares.

En cuanto a métodos numéricos que resuelven ecuaciones matriciales no lineales, se destaca el amplio uso del método de Newton [25][27][42]. Recientemente, se ha propuesto un método tipo secante para resolver dichas ecuaciones [41] dejando un camino abierto para investigar al respecto. Esto, unido al hecho de que son numerosas las aplicaciones en las que surge la necesidad de resolver una ecuación matricial no lineal, nos motivó a desarrollar el presente trabajo.

En este trabajo de investigación, desarrollamos una *teoría general de convergencia* de un *método secante de cambio mínimo* para encontrar ceros de *ecuaciones matriciales no lineales*. Bajo ciertas hipótesis, demostramos que este método proporciona un *algoritmo local y superlinealmente convergente*.

La presentación de este documento la organizamos de la siguiente forma. En el Capítulo 2, presentamos en forma descriptiva los sistemas de ecuaciones no lineales; inicialmente abordamos el caso de *funciones no lineales de valor y variable vectorial*, para luego extenderlos a *funciones no lineales de valor y variable matricial*. En cada caso, presentamos un breve desarrollo teórico de los métodos de *Newton* y *cuasi Newton*, en particular de

los métodos secantes de cambio mínimo. Además, para el caso matricial, ilustramos *el operador derivada de Fréchet* para algunas *funciones matriciales.*

En el Capítulo **3**, consideramos un algoritmo tipo secante propuesto en [41] para resolver problemas matriciales no lineales mostramos que es un *algoritmo secante de cambio mínimo* y, usando las reglas generales de la teoría de convergencia local para métodos secantes desarrollada en [15], demostramos que dicho algoritmo converge local y superlinealmente.

En el Capítulo **4**, exploramos numéricamente el comportamiento local del *método secante de cambio mínimo* presentado teóricamente en el Capítulo **3**. Para ello, consideramos un problema que guarda una estrecha relación con la llamada *función cuadrática matricial* y que es conocido como el *problema de los valores propios cuadrático* [26][27][50]. Presentamos una breve descripción teórica del problema y lo resolvemos usando el algoritmo secante de cambio mínimo en tres casos particulares incluyendo un problema de aplicación conocido como *sistema masa-resorte amortiguador.*

En el Capítulo **5**, hacemos algunos comentarios finales y propuestas para trabajos futuros sobre el tema.

Finalmente, presentamos la bibliografía que usamos en el desarrollo de este trabajo de investigación.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

En muchos problemas en diferentes áreas de la investigación aplicada surge la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones no lineales; es decir, encontrar un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga la ecuación,

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal y continuamente diferenciable [15][45].

Al igual que en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, los no lineales pueden tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución. En contraste al caso de los sistemas de ecuaciones lineales, métodos directos para la solución de sistemas no lineales son usualmente aplicables solamente para sistemas pequeños; así, todos los algoritmos prácticos para resolver (2.1) son iterativos [45].

Uno de los métodos más populares y frecuentemente usado para resolver el problema (2.1), por sus “buenas” propiedades de convergencia, es el *método de Newton* [15][45]. En este método, dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, una aproximación inicial a la solución de (2.1), se considera en cada iteración un modelo de $F(\mathbf{x})$ de la forma

$$M_k(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}_k) + F'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k),$$

donde $F'(\mathbf{x}_k)$ denota la *matriz jacobiana* de F en \mathbf{x}_k y se resuelve el problema

$M_k(\mathbf{x}) = 0$. Es decir, se encuentra la raíz de este modelo la que se define como \mathbf{x}_{k+1} . Así, una iteración del método de Newton está dada por

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{x}_k)\mathbf{s}_k &= -F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En cada iteración, el método de Newton debe resolver un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $F'(\mathbf{x}_k)$, lo cual, desde el punto de vista computacional, es costoso [1].

Una alternativa al costo computacional que implica emplear la *matriz jacobiana* en cada iteración, la representan los llamados *métodos cuasi-Newton*, que usan una aproximación a la *matriz jacobiana* en lugar de ella misma. El objetivo con el que fueron creados estos métodos fué el de mantener las “bondades” del método de Newton pero con un menor costo computacional. En el desarrollo de estos métodos, en cada iteración, se considera un modelo de $F(\mathbf{x})$ de la forma

$$\hat{M}_k(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}_k) + B_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k),$$

donde B_k es una matriz que aproxima a $F'(\mathbf{x}_k)$, y se resuelve el problema $\hat{M}_k(\mathbf{x}) = 0$. Esto es, se encuentra la raíz de este modelo, la que se define como \mathbf{x}_{k+1} . Una iteración de estos métodos está dada por

$$\begin{aligned} B_k\mathbf{s}_k &= -F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k, \end{aligned}$$

[1][15][45]. El “precio” que se paga por utilizar una aproximación a la *matriz jacobiana* en lugar de ella misma, se refleja en la disminución de la tasa de convergencia de estos métodos, la cual es *superlineal*, en contraste con la del método de Newton que es *cuadrática* [15].

En algunos casos, la matriz B_k se encuentra interpolando el modelo \hat{M} en \mathbf{x}_{k+1} ; es decir, haciendo que $F(\mathbf{x}_{k+1})$ coincida con el modelo $\hat{M}(\mathbf{x}_{k+1})$, con lo cual, se llega a la llamada *ecuación secante* [41]

$$B_{k+1}\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k, \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_k = F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k)$.

Los *métodos cuasi Newton* se diferencian entre sí por la forma como actualizan la matriz B_k en cada iteración. Entre estos métodos, se encuentran los llamados *métodos secantes de cambio mínimo* [36][37][38], en los cuales la actualización de B_k , la matriz B_{k+1} , debe satisfacer la *ecuación secante* (2.3) y su cambio, medido en alguna norma, respecto a la matriz B_k debe ser mínimo; es decir,

$$\|B_{k+1} - B_k\| = \min_{B \in V} \|B - B_k\|, \tag{2.4}$$

donde V es un conjunto de matrices en $\mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfacen la *ecuación secante* (2.3).

Pedir que en cada iteración se satisfaga la *ecuación secante* y que además haya un *cambio mínimo* entre dos aproximaciones consecutivas, permite que la sucesión de matrices $\{B_k\}$ muestre un fenómeno conocido como *deteriorización controlada* [7][17][36], el cual garantiza que las matrices de la sucesión permanezcan en una vecindad de $F'(\mathbf{x}_*)$. Esto es esencial para probar la convergencia *local lineal*.

Por lo tanto, en cada iteración de un algoritmo *secante de cambio mínimo*, el conjunto V está determinado por los vectores \mathbf{x}_k y \mathbf{x}_{k+1} ,

$$V \equiv V(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \{B \in T \subseteq \mathbb{R}^{n \times n} : B(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k)\}, \quad (2.5)$$

donde T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n \times n}$ [17].

Como necesitamos que la matriz en V sea la “más próxima” a B_k , es natural pensar en la *proyección ortogonal* de esta matriz sobre el conjunto V , $P_V(B_k) = P_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}}(B_k)$. Teniendo en cuenta que

$$\|P_V(B_k) - B_k\| = \inf_{B \in V} \|B - B_k\| = \min_{B \in V} \|B - B_k\|, \quad (2.6)$$

donde la segunda igualdad se tiene debido a que V es un *conjunto cerrado*, entonces podemos garantizar que $P_V(B_k) \in V$. Además, esta proyección es única, puesto que V es un *conjunto convexo* [31]. Así, de (2.6), tenemos que

$$B_{k+1} = P_V(B_k).$$

Diferentes *actualizaciones secantes de cambio mínimo* se obtienen al cambiar la norma matricial en $\mathbb{R}^{n \times n}$ o cambiar el subespacio T . Es así como se genera una *familia de métodos secantes de cambio mínimo*, como por ejemplo, la *actualización “buena” de Broyden* [7]

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\mathbf{y}_k - B_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}, \quad (2.7)$$

la cual resulta de elegir la *norma de Frobenius* y $T = \mathbb{R}^{n \times n}$, o también, la *actualización “mala” de Broyden* [5]

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\mathbf{y}_k - B_k \mathbf{s}_k) \mathbf{y}_k^T B_k}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k}, \quad (2.8)$$

que resulta de elegir la *norma de Frobenius* y

$$V = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : B^{-1}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k)\}. \quad (2.9)$$

Si en el problema (2.1), la función F es una función no lineal, de *variable* y *valor matricial* y *Fréchet diferenciable* [25][42],

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ X &\longmapsto F(X), \end{aligned}$$

entonces, el problema (2.1) se transforma en encontrar una matriz $X_* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$F(X_*) = \mathbf{O}, \quad (2.10)$$

donde \mathbf{O} denota la matriz cero de $\mathbb{C}^{n \times n}$. Es decir, (2.10) representa un sistema matricial diferenciable de ecuaciones no lineales .

Dado que F es *Fréchet diferenciable* en X , existe una aplicación lineal y continua

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ S &\longmapsto L(X, S), \end{aligned}$$

tal que para todo $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$F(X + S) = F(X) + L(X, S) + R(S), \quad (2.11)$$

con

$$\lim_{\|S\| \rightarrow 0} \frac{\|R(S)\|}{\|S\|} = 0, \quad (2.12)$$

lo cual significa que, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|S\| < \delta$ entonces $\|R(S)\| < \epsilon \|S\|$.

Dado que L es una aplicación lineal, la igualdad (2.11) puede escribirse como

$$F(X + S) = F(X) + F'(X)S + R(S), \quad (2.13)$$

ya que, $L(X, S) = F'(X)S$, donde $F'(X) \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$ denota la *matriz jacobiana* de $F : \mathbb{C}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ en X .

Con el fin de identificar el operador derivada L en algunos casos particulares, presentaremos a continuación algunas *funciones matriciales no lineales* que han tenido gran importancia debido a sus aplicaciones [42]. En cada una de las funciones matriciales, consideramos a A como una matriz de tamaño $n \times n$.

1. *Inversa matricial.* La función matricial asociada a este problema está definida por

$$F(X) = X^{-1} - A. \quad (2.14)$$

Usando (2.11), tenemos que

$$F(X + S) = (X + S)^{-1} - A \quad (2.15)$$

Dado que para matrices B y C de tamaño $n \times n$ con B no singular [42],

$$(B + C)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}CB^{-1} + O(\|C\|^2),$$

la igualdad (2.15) se transforma en

$$F(X + S) = X^{-1} - A - X^{-1}SX^{-1} + O(\|S\|^2),$$

de donde se deduce, por comparación con (2.13), que

$$L(X, S) = -X^{-1}SX^{-1}. \quad (2.16)$$

Hallar la inversa de una matriz es uno de los problemas más antiguos, dicho problema se encuentra asociado con la solución de sistemas lineales y en la actualidad, asociado con la técnica de construcción de estrategias de preconditionamiento de métodos iterativos [8][9].

2. *Matriz raíz cuadrada.* La función matricial que describe este problema está dada por

$$F(X) = X^2 - A. \quad (2.17)$$

A partir de (2.11), tenemos que

$$\begin{aligned} F(X + S) &= (X + S)^2 - A \\ &= X^2 - A + XS + SX + S^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

con lo cual, $L(X, S) = XS + SX$.

En este caso, la expresión para $L(X, S)$ está relacionada con la ecuación del tipo

$$AX - XB = C, \quad (2.19)$$

conocida como la *ecuación de Sylvester*, donde X y $C \in \mathbb{C}^{n \times p}$; las matrices A y B son de orden n y p , respectivamente [29][40][44][48]. Solucionar la *ecuación de Sylvester* no es un problema fácil, pues se requiere de un gran esfuerzo computacional.

La ecuación matricial $X^2 - A = \mathbf{O}$ puede no tener solución, muchas soluciones o infinitas soluciones [28]. En el caso particular de que la matriz A no tenga valores propios negativos o nulos, entonces existe una única matriz X_* tal que la parte real de sus valores propios es positiva [28][29]; en este caso, $X_* = A^{1/2}$ se llama la *raíz cuadrada principal* de A . Esta matriz, la podemos caracterizar cuando A es diagonalizable [42].

3. *Función matricial signo.* La función matricial *signo* de A se define como

$$G(A) = \text{sign}(A) = A(A^2)^{-1/2}, \quad (2.20)$$

donde $A^{1/2}$ es la raíz cuadrada principal de A .

Para definir un método iterativo que encuentre el *signo* de una matriz, es de gran importancia tener en cuenta las siguientes propiedades de la función G .

- a) $G^2 = I_n$ (G es involutiva).
- b) $AG = GA$.
- c) Si A es definida positiva ($A > 0$) entonces $G = I_n$.

De la primera propiedad, tenemos que $G = \text{sign}(A)$ es la raíz cuadrada de la matriz identidad; además, de la segunda propiedad, se deduce que G conmuta con A ; es decir, $G = \text{sign}(A)$ es la raíz cuadrada de la matriz identidad que conmuta con la matriz A [42].

Así, la función de matricial que describe a $G = \text{sign}(A)$ es

$$F(X) = X^2 - I_n. \quad (2.21)$$

Usando (2.11), tenemos que

$$\begin{aligned} F(X + S) &= (X + S)^2 - I_n \\ &= X^2 - I_n + XS + SX + S^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

al igual que para la *matriz raíz cuadrada*

$$L(X, S) = XS + SX. \quad (2.23)$$

4. *Función cuadrática matricial.* Una *función cuadrática matricial* está definida por

$$Q(X) = AX^2 + BX + C, \quad (2.24)$$

donde A, B y $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Esta no es la única forma de definirla; otras formas son $Q_1(X) = X^2A + XB + C$, y $Q_2(X) = XAX + BX + XC + D$ con $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$, esta última conocida como la *función algebraica de Riccati* [4][34].

Usando (2.11), tenemos que

$$\begin{aligned} Q(X + S) &= A(X + S)^2 + B(X + S) + C \\ &= Q(X) + (ASX + (AX + B)S) + AS^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

luego,

$$L(X, S) = ASX + (AX + B)S. \quad (2.26)$$

En este caso, la expresión para $L(X, S)$ está relacionada con la ecuación del tipo

$$AXB - CXD = E, \quad (2.27)$$

conocida como la *ecuación de Sylvester generalizada* para la cual, existen varios métodos de solución [19].

Por otro lado, volviendo al problema (2.10) tenemos que para el caso vectorial, el *método de Newton* es el más popular para resolver un sistema matricial. Él surge de manera natural al considerar la aproximación de *Taylor* de F alrededor de X dada por (2.11).

Una iteración del método de Newton para resolver (2.10) está dada por

$$\begin{aligned} L(X_k, S_k) &= -F(X_k) \\ X_{k+1} &= X_k + S_k. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Teniendo en cuenta que $L(X_k, S_k) = F'(X_k)S_k$, donde $F'(X_k) \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$, la iteración (2.28) se puede ver equivalentemente como

$$\begin{aligned} F'(X_k)S_k &= -F(X_k) \\ X_{k+1} &= X_k + S_k. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Observamos que (2.11) nos permite identificar la aplicación de $F'(X)$ sobre S , que es lo que se necesita en el paso (2.29) de una iteración de Newton para el problema (2.10).

La iteración del método de Newton dada por (2.29) es semejante a la dada por (2.2), pero existe una gran diferencia: mientras en (2.2) es posible encontrar a s_k para cada k ; resolviendo en cada paso un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $F'(X_k)$ en (2.29) esto no es posible, puesto que $F'(X_k)$ y S_k son matrices cuadradas de órdenes distintos.

En casos particulares como los de las *funciones matriciales* que presentamos anteriormente, la iteración del *método de Newton* (2.29) ha operado usando la *expansión de Taylor* de F dada por (2.11), para encontrar el operador L y así proceder a solucionar el sistema de ecuaciones lineales $F'(X_k)S_k = -F(X_k)$, equivalentemente $L(X_k, S_k) = -F(X_k)$. En cada uno de estos casos, se ha desarrollado la teoría de convergencia respectiva [42][41].

Historicamente, siempre que el *método de Newton* se ha propuesto para resolver un problema específico, también un *método secante* se ha podido desarrollar para el mismo

problema, lo que sirvió como motivación a los autores en [41] a proponer uno de tales métodos para el caso matricial y del cual hablaremos al final de esta sección y el capítulo siguiente.

Una forma en la que podemos abordar el problema (2.10) mediante un *método cuasi Newton* es usando matrices de tamaño $n^2 \times n^2$ para aproximar la *matriz jacobiana* de F en X , $F'(X)$. Para esto, debemos reescribir la función F de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^{n^2} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n^2} \\ X &\longmapsto F(X), \end{aligned}$$

y también reescribir a $X \in \mathbb{C}^{n^2}$ y $S \in \mathbb{C}^{n^2}$ como vectores, para lo cual es conveniente denotar a X y S como \mathbf{x} y \mathbf{s} , respectivamente. Así, la iteración del *método de Newton matricial* (2.29) está bien definida y tiene forma análoga a la iteración de Newton para el problema (2.1); es decir, cuando la función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Así, una iteración de un *método cuasi Newton* para el problema matricial (2.10) está dada por

$$\begin{aligned} B_k \mathbf{s}_k &= -F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k. \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde $B_k \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$ es una matriz que aproxima a $F'(\mathbf{x}_k)$.

En este escenario, podemos considerar un *método secante de cambio mínimo* para el cual de forma análoga al caso de *funciones de valor y variable vectorial* descrito anteriormente, la actualización de B_k , la matriz $B_{k+1} \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$, debe satisfacer la *ecuación secante* (2.3) y su cambio, medido en alguna norma con respecto a B_k debe ser mínimo. Así, sobre el conjunto

$$V \equiv V(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} : B(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k) \right\},$$

que es infinito, podemos buscar la matriz más cercana a B_k , como la proyección ortogonal de la matriz B_k sobre el conjunto V .

Una desventaja que podríamos tener con este tipo de aproximación es que no dispongamos de la forma explícita de la *matriz jacobiana* $F'(X_k)$ con lo cual, no sería posible encontrar una matriz B_k que aproxime a $F'(X_k)$. Por otro lado, si disponemos de la *matriz jacobiana*, el costo computacional al realizar dicha aproximación sería supremamente alto.

La alternativa propuesta en [42][41] para abordar el problema (2.10), consiste en un método tipo secante clásico para resolver problemas matriciales no lineales. Esta nueva

propuesta tiene características interesantes entre las que se destaca el uso de matrices de tamaño $n \times n$ a diferencia de la extensión estándar de los métodos cuasi Newton que utilizan operadores lineales de tamaño $n^2 \times n^2$ para aproximar la derivada de la función F [21][46]. Al hacer uso de matrices de tamaño $n \times n$ en el método secante, se reduce significativamente el costo computacional asociado con el álgebra lineal del algoritmo.

Dichos autores presentan resultados numéricos preliminares de su algoritmo para algunas funciones y problemas matriciales particulares que indican que su propuesta *secante* parece tener propiedades interesantes que aún no han sido establecidas. Además, resaltan que falta más experimentación numérica.

Motivados no solo por la propuesta sino por lo mencionado en el párrafo anterior, realizamos el análisis teórico de convergencia de este algoritmo secante, el cual presentamos en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 3

ALGORITMO Y TEORÍA DE CONVERGENCIA

En este capítulo, consideramos un algoritmo tipo *secante* de la forma propuesta en [42][41] para resolver el problema (2.10). Mostramos que este algoritmo secante es *de cambio mínimo* y desarrollamos *la teoría general de convergencia local* para el mismo.

El análisis de convergencia local del *método secante* lo realizaremos siguiendo los lineamientos generales para convergencia de métodos secantes (*de cambio mínimo*) clásicos [15][38]. Así, bajo hipótesis estándar demostramos que las matrices que aproximan a $L(X_*, S)$ se deterioran pero en forma controlada, lo cual, nos permitió demostrar convergencia lineal del algoritmo, para posteriormente demostrar convergencia local superlineal del mismo.

La iteración de un método secante general para resolver (2.1) puede expresarse de la siguiente manera

$$X_{k+1} = X_k - A_k^{-1}F(X_k), \quad (3.1)$$

donde la actualización de A_k , denotada por $A_{k+1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, es una matriz que satisface la llamada *ecuación secante matricial*,

$$A_{k+1}S_k = Y_k, \quad (3.2)$$

con, $S_k = X_{k+1} - X_k$ y $Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$.

Es importante resaltar que la matriz $A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no es una aproximación de $F'(X_k)$, como se hace de manera natural en caso de *funciones de variable y valor vectorial*. Dado que, $A_k S_k$ y $F'(X_k) S_k$ son matrices de tamaño $n \times n$, los autores en [42] y [41] aproximan la matriz $F'(X_k) S_k$ por $A_k S_k$, lo cual constituye el aspecto novedoso de su propuesta.

Teniendo en cuenta que la iteración del método de Newton dada por la Ecuación (2.28) es equivalente a (2.29) y a partir de la forma general del operador L dada en (2.11), utilizaremos $L(X_k, S_k)$ en lugar de $F'(X_k) S_k$. Así, consideramos la iteración (3.1) con el supuesto de que en cada iteración $A_k S_k$ aproxima a $L(X_k, S_k)$ con lo cual, obtenemos el siguiente *algoritmo secante* para resolver el problema (2.10).

Algoritmo 3.1 (Algoritmo secante). *Dadas las matrices X_{-1} y X_0 , definimos $S_{-1} = X_0 - X_{-1}$, $Y_{-1} = F(X_0) - F(X_{-1})$ y A_0 como la solución del sistema matricial $A_0 S_{-1} = Y_{-1}$.*

Para $k = 0, 1, \dots$, las matrices X_{k+1} , S_k , Y_k y A_{k+1} son generadas como sigue

$$A_k S_k = -F(X_k) \quad (3.3)$$

$$X_{k+1} = X_k + S_k \quad (3.4)$$

$$Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$$

$$A_{k+1} S_k = Y_k. \quad (3.5)$$

El **Algoritmo 3.1** calcula la matriz S_k resolviendo el sistema de ecuaciones lineales dado por la ecuación (3.3). Como podemos observar en este algoritmo, en cada iteración, la actualización de la matriz A_k , denotada A_{k+1} , debe satisfacer *la ecuación secante matricial*, en cuyo caso la matriz S_k debe ser no singular. Además, dicha actualización se calcula en forma única mediante la Ecuación (3.5). Así, en cada iteración, el conjunto de todas las matrices que satisfacen *la ecuación secante* (descrito en el **Capítulo 2**)

$$V = V(X_k, X_{k+1}) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B(X_{k+1} - X_k) = F(X_{k+1}) - F(X_k)\}, \quad (3.6)$$

es **unitario**: su único elemento es la matriz A_{k+1} como lo garantiza el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Si para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, la matriz $X_{k+1} - X_k$ es no singular, entonces el conjunto V definido por (3.6) es unitario.*

Demostración. Para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, consideremos las matrices

$$S_k = X_{k+1} - X_k \quad \text{y} \quad Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k).$$

Dado que la matriz S_k es no singular, entonces existe la matriz $Y_k S_k^{-1}$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, es decir V es un conjunto no vacío.

Sean B_1 y B_2 matrices que pertenecen al conjunto V , entonces tenemos que

$$B_1 S_k = Y_k \quad \text{y} \quad B_2 S_k = Y_k,$$

de ahí que

$$B_1 S_k = B_2 S_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

como la matriz S_k es no singular entonces, multiplicando la ecuación (3.7) por S_k^{-1} , se obtiene que $B_1 = B_2$. Por lo tanto, el conjunto V es unitario. \blackbox

Así, para encontrar la matriz en el conjunto V más próxima a A_k , como se requiere en los métodos *secantes de cambio mínimo* (**Capítulo 2**), no es necesario calcular explícitamente su *proyección ortogonal* sobre dicho conjunto. Dado que V es unitario, la proyección ortogonal de A_k sobre V es su único elemento. En otras palabras, la matriz de *cambio mínimo* buscada es la única solución de la *ecuación secante matricial* (3.5). Por lo tanto el **Algoritmo 3.1** es un *algoritmo secante de cambio mínimo*.

A continuación, presentamos las hipótesis locales bajo las cuales desarrollamos la teoría de convergencia local del **Algoritmo 3.1**. Estas hipótesis son hipótesis estándar análogas a las utilizadas para demostrar convergencia de métodos secantes clásicos en el caso vectorial [15].

3.1. Hipótesis

H1. $F : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ es **Fréchet diferenciable** en un conjunto $D \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ abierto y convexo.

H2. Existe $X_* \in D$ tal que $F(X_*) = \mathbf{O}$.

H3. F' es *localmente Lipschitz continua* en un entorno de X_* ; es decir, existen números positivos γ y r tales que

$$\|F'(X) - F'(X_*)\| \leq \gamma \|X - X_*\|,$$

para todo X que pertenezca a un entorno de radio r alrededor de X_* , denotado por $\mathcal{N}(X_*, r) \subset D$, donde $\|\cdot\|$ denota una norma matricial inducida en $\mathbb{C}^{n \times n}$.

H4. La matriz $L(X_*, S)$ es no singular y existe $\beta > 0$ tal que

$$\|L(X_*, S)^{-1}\| \leq \beta.$$

3.2. Resultados de convergencia

A manera de preliminar, en el **Lema 3.1** presentamos un resultado del álgebra lineal numérica, el cual da una condición suficiente para la no singularidad de una matriz de tamaño $n \times n$ y una cota para la inversa de dicha matriz. Este resultado será de utilidad en la demostración del **Teorema 3.2**.

Lema 3.1 (Lema de Banach). Sean $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida en $\mathbb{C}^{n \times n}$ y $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si A es no singular y $\|\mathbf{I}_n - A^{-1}B\| < 1$ entonces B es no singular y

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{I}_n - A^{-1}B\|}.$$

Demostración. Ver [15][22][23].

✠

A continuación, presentamos algunos resultados útiles para probar la convergencia local y superlineal del **Algoritmo 3.1**.

Lema 3.2. Sea $F : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ una función que satisface las hipótesis **H1** a **H3**, entonces la aplicación L satisface la siguiente desigualdad

$$\|L(X, S) - L(X_*, S)\| \leq \gamma \|X - X_*\| \|S\|.$$

Demostración. Para $X \in \mathcal{N}(X_*, r)$, $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial, de la definición de la aplicación L dada por (2.11), teniendo en cuenta que $L(X, S) = F'(X)S$ y de la hipótesis **H3**, se obtiene

$$\begin{aligned} \|L(X, S) - L(X_*, S)\| &= \|F'(X)S - F'(X_*)S\| \\ &\leq \|F'(X) - F'(X_*)\| \|S\| \\ &\leq \gamma \|X - X_*\| \|S\|. \end{aligned}$$

✠

El siguiente Lema garantiza que si las aproximaciones a $L(X_*, S)$ empeoran, entonces esto ocurre en forma controlada. Este resultado es análogo al de *deteriorización controlada* que ocurre en el caso vectorial [36][37][38].

Lema 3.3. *Supongamos las hipótesis **H1** a **H3** se verifican y sean $A_+ \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la única matriz en el conjunto $V(X, Y)$ y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz que satisface $AS = -F(X)$ con $S = Y - X$. Entonces, existe una constante positiva c tal que*

$$\|A_+S - L(X_*, S)\| \leq \|AS - L(X_*, S)\| + c \|Y - X_*\|. \quad (3.8)$$

Demostración. Usando las hipótesis **H2**, $A_+ \in V(X, Y)$, $AS = -F(X)$ y la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} \|A_+S - L(X_*, S)\| &= \|A_+(Y - X) - L(X_*, Y - X)\| \\ &= \|F(Y) - F(X) - L(X_*, Y - X)\| \\ &= \|F(Y) + A(Y - X) - L(X_*, Y - X)\| \\ &\leq \|F(Y) - F(X_*)\| + \|A(Y - X) - L(X_*, Y - X)\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- Por la hipótesis **H1**, tenemos que

$$F(Y) = F(X_*) + L(X_*, Y - X_*) + R(Y - X_*), \quad (3.10)$$

donde

$$\lim_{\|Y - X_*\| \rightarrow 0} \frac{\|R(Y - X_*)\|}{\|Y - X_*\|} = 0, \quad (3.11)$$

es decir, para $\rho > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $\|Y - X_*\| < \epsilon$ entonces

$$\|R(Y - X_*)\| < \rho \|Y - X_*\|. \quad (3.12)$$

- La aplicación L es acotada ya que su dominio es de dimensión finita [32], por lo tanto, existe $k_1 > 0$ tal que

$$\|L(X_*, Y - X_*)\| \leq k_1 \|Y - X_*\|. \quad (3.13)$$

Usando (3.10), (3.12) y (3.13) en (3.9), obtenemos

$$\begin{aligned} \|A_+S - L(X_*, S)\| &\leq \|L(X_*, Y - X_*)\| + \|R(Y - X_*)\| + \|A(Y - X) - L(X_*, Y - X)\| \\ &\leq c \|Y - X_*\| + \|A(Y - X) - L(X_*, Y - X)\|, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $c = k_1 + \rho$.

Por lo tanto, existe una constante positiva c tal que:

$$\|A_+S - L(X_*, S)\| \leq \|AS - L(X_*, S)\| + c \|Y - X_*\|. \quad \blackbox$$

El Lema anterior es útil para demostrar que la sucesión $\{X_k\}$ generada por (3.4) converge local y linealmente a X_* , lo cual es garantizado en el siguiente Teorema.

Teorema 3.2. *Supongamos las hipótesis **H1** a **H4**. Existen constantes positivas ϵ y δ tales que si $\|X_0 - X_*\| \leq \epsilon$ y $\|A_0 S_0 - L(X_*, S_0)\| \leq \delta$ entonces la sucesión $\{X_k\}$ generada por el **Algoritmo 3.1** está bien definida y converge linealmente a X_* .*

Demostración. Sean $\|\cdot\|$ una norma matricial, β la constante dada por la hipótesis **H4**, c la constante dada en (3.8), $L_* = L(X_*, S_k)$, $E_k = X_k - X_*$ y sean $\bar{\epsilon}$ y δ tales que

$$12\beta\delta \leq 1 \quad (3.15)$$

$$2c\bar{\epsilon} \leq \delta. \quad (3.16)$$

Para la escogencia de ϵ hacemos las siguientes consideraciones. Para $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

- De (2.12), tenemos que para $\rho_0 < \frac{\delta}{\|E_0\|}$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $\|S_i\| < \epsilon_0$ entonces

$$\|R(S_i)\| < \rho_0 \|S_i\|. \quad (3.17)$$

- Por la *continuidad* de la función F , para $\rho_1 < \delta$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que si $\|S_i\| < \epsilon_1$ entonces

$$\|F(X_* + S_i) - F(X_*)\| \leq \rho_1. \quad (3.18)$$

En forma análoga, para $\rho_2 < \delta$, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que si $\|E_i\| < \epsilon_2$ entonces

$$\|F(X_i) - F(X_*)\| \leq \rho_2. \quad (3.19)$$

Luego, escogemos

$$\epsilon = \min \{\bar{\epsilon}, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}. \quad (3.20)$$

Para demostrar que la sucesión $\{X_k\}$ generada por el **Algoritmo 3.1** converge linealmente a X_* , demostraremos por inducción que

$$\|A_k S_k - L(X_*, S_k)\| \leq (2 - 2^{-k}) \delta, \quad (3.21)$$

$$\|X_{k+1} - X_*\| \leq \frac{1}{2} \|X_k - X_*\|. \quad (3.22)$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

i) Para $k = 0$, la desigualdad (3.21) es inmediata ya que

$$\|A_0 S_0 - L(X_*, S_0)\| \leq \delta = (2 - 2^0) \delta. \quad (3.23)$$

La demostración de (3.22) es idéntica a la prueba en el *paso de inducción*, por ello la omitimos aquí.

ii) *Hipótesis inductivas*. Supongamos que (3.21) y (3.22) se cumplen para $k = 0, 1, \dots, i - 1$

iii) *Paso de inducción*. Probemos que (3.21) y (3.22) se cumplen para $k = i$.

De la propiedad de *deteriorización* (3.8) y de las *hipótesis inductivas*, tenemos que

$$\|A_i S_i - L(X_*, S_i)\| \leq (2 - 2^{-(i-1)}) \delta + c \|X_{i-1} - X_*\| \quad (3.24)$$

y

$$\|X_{i-1} - X_*\| \leq \frac{1}{2} \|X_{i-2} - X_*\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \|X_0 - X_*\| \leq 2^{-(i-1)} \epsilon \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.24), usando (3.20) y (3.16) tenemos

$$\begin{aligned} \|A_i S_i - L(X_*, S_i)\| &\leq (2 - 2^{-(i-1)}) \delta + c 2^{-(i-1)} \epsilon \\ &\leq (2 - 2^{-(i-1)}) \delta + c 2^{-(i-1)} \bar{\epsilon} \\ &= (2 - 2^{-(i-1)}) \delta + 2^{-i} 2 c \bar{\epsilon} \\ &\leq (2 - 2^{-(i-1)} + 2^{-i}) \delta = (2 - 2^{-i}) \delta \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|A_i S_i - L(X_*, S_i)\| \leq (2 - 2^{-i}) \delta. \quad (3.26)$$

Para demostrar (3.22), debemos mostrar primero que la matriz $A_k S_k$ es no singular, con lo cual el **Algoritmo 3.1** está bien definido. Para ello, por la hipótesis **H4**, (3.15) y (3.26) tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}_n - L(X_*, S_i)^{-1} A_i S_i\| &= \|L(X_*, S_i)^{-1} L(X_*, S_i) - L(X_*, S_i)^{-1} A_i S_i\| \\ &\leq \|L(X_*, S_i)^{-1}\| \|L(X_*, S_i) - A_i S_i\| \\ &\leq \beta (2 - 2^{-i}) \delta \leq 2 \beta \delta \leq \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por el **Lema de Banach**, concluimos que la matriz $A_i S_i$ es no singular y por lo tanto, las matrices A_i y S_i son no singulares. Además,

$$\|(A_i S_i)^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5} \beta. \quad (3.28)$$

Así, X_{i+1} está bien definido. Sumando a ambos lados de la ecuación (3.4) la matriz $-X_*$, sustituyendo S_i por $-A_i^{-1}F(X_i)$ y mediante algunas operaciones algebraicas, obtenemos,

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= X_i - X_* - A_i^{-1}F(X_i) \\ &= I_n E_i - A_i^{-1}F(X_i) \\ &= (A_i S_i)^{-1} A_i S_i (E_i) - (A_i S_i)^{-1} L_* E_i + (A_i S_i)^{-1} L_* E_i \\ &\quad - (A_i S_i)^{-1} F(X_* + S_i) E_i + (A_i S_i)^{-1} F(X_* + S_i) E_i - A_i^{-1} F(X_i). \end{aligned} \quad (3.29)$$

En la igualdad anterior, aplicamos una norma matricial, algunas de sus propiedades, sumamos $F(X_*) = \mathbf{O}$, usamos la desigualdad $\|S_i\| \leq \|E_{i+1}\| + \|E_i\|$ y obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|E_{i+1}\| &\leq \|(A_i S_i)^{-1}\| \left[\|A_i S_i - L_*\| + \|L_* - F(X_* + S_i) + F(X_*)\| \right] \|E_i\| \\ &\quad + \|(A_i S_i)^{-1} F(X_* + S_i) E_i - S_i S_i^{-1} A_i^{-1} F(X_i)\| \\ &\leq \|(A_i S_i)^{-1}\| \left[\|A_i S_i - L_*\| + \|R(S_i)\| + \|F(X_* + S_i) - F(X_*)\| \right] \|E_i\| \\ &\quad + \|(A_i S_i)^{-1}\| \|F(X_i) - F(X_*)\| \|S_i\| \quad (3.30) \\ &\leq \|(A_i S_i)^{-1}\| \left[\|A_i S_i - L_*\| + \|R(S_i)\| + \|F(X_* + S_i) - F(X_*)\| \right] \|E_i\| \\ &\quad + \|(A_i S_i)^{-1}\| \|F(X_i) - F(X_*)\| \|E_i\| + \|(A_i S_i)^{-1}\| \|F(X_i) - F(X_*)\| \|E_{i+1}\|. \end{aligned}$$

Luego, usando (3.17), (3.18), (3.19), (3.32), las hipótesis inductivas (3.21) y (3.22) en (3.30) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|E_{i+1}\| &\leq \frac{6}{5}\beta \left[(2 - 2^{-i})\delta + \rho_0 \|S_i\| + \rho_1 + \rho_2 \right] \|E_i\| + \frac{6}{5}\beta \rho_2 \|E_{i+1}\| \\
&\leq \frac{6}{5}\beta \left[2\delta - 2^{-i}\delta + \rho_0 \|E_i\| + \rho_1 + \rho_2 \right] \|E_i\| + \frac{6}{5}\beta \left[\rho_0 \|E_i\| + \rho_2 \right] \|E_{i+1}\| \\
&\leq \frac{6}{5}\beta \left[2\delta - 2^{-i}\delta + \rho_0 2^{-i} \|E_0\| + \rho_1 + \rho_2 \right] \|E_i\| + \frac{6}{5}\beta \left[\rho_0 2^{-i} \|E_0\| + \rho_2 \right] \|E_{i+1}\| \\
&\leq \frac{6}{5}\beta \delta [2 + 1 + 1] \|E_i\| + \frac{6}{5}\beta \delta [2] \|E_{i+1}\| \\
&\leq \frac{2}{5}\|E_i\| + \frac{1}{5}\|E_{i+1}\|
\end{aligned} \tag{3.31}$$

haciendo operaciones algebraicas en la desigualdad (3.30), se concluye que

$$\|E_{i+1}\| \leq \frac{1}{2}\|E_i\| \tag{3.32}$$

equivalentemente, $\|X_{i+1} - X_*\| \leq \frac{1}{2}\|X_i - X_*\|$.

Con lo cual, la sucesión $\{X_k\}$ converge linealmente a X_* . ✠

A continuación, presentamos un teorema análogo al **teorema condición de Dennis-Moré** [16], el cual da una condición suficiente para convergencia local superlineal de un algoritmo cuasi Newton.

Teorema 3.3 (Condición tipo Dennis-Moré). *Sea $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un conjunto abierto y convexo para el cual son válidas las hipótesis **H1** a **H4**. Sea $\{A_k\}$ la sucesión de matrices generadas por (3.5) y supongamos que para alguna matriz $X_0 \in D$, la sucesión de matrices $\{X_k\}$ generada por (3.4) satisface que $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_*$. Si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} = 0, \tag{3.33}$$

donde $S_k = X_{k+1} - X_k$, entonces la sucesión $\{X_k\}$ converge superlinealmente a X_* .

Demostración. Denotemos $L_* = L(X_*, S_k)$, $L_k = L(X_k, S_k)$ y $E_k = X_k - X_*$.

De (3.3), tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{O} &= A_k S_k - F(X_k) \\ &= A_k S_k - L_* + F(X_k) + L_*,\end{aligned}$$

sumando $-F(X_{k+1})$ en ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos

$$-F(X_{k+1}) = A_k S_k - L_* + [-F(X_{k+1}) + F(X_k) + L_*], \quad (3.34)$$

aplicando la desigualdad triangular, algunas operaciones algebraicas y el **Lema 3.2**, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\|F(X_{k+1})\|}{\|S_k\|} &\leq \frac{\|A_k S_k - L_*\|}{\|S_k\|} + \frac{\|-F(X_{k+1}) + F(X_k) + L_*\|}{\|S_k\|} \\ &= \frac{\|A_k S_k - L_*\|}{\|S_k\|} + \frac{\|-L_k + L_* - R(S_k)\|}{\|S_k\|} \\ &\leq \frac{\|A_k S_k - L_*\|}{\|S_k\|} + \frac{\|L_* - L_k\| + \|R(S_k)\|}{\|S_k\|} \\ &\leq \frac{\|A_k S_k - L_*\|}{\|S_k\|} + \gamma \|E_k\| + \frac{\|R(S_k)\|}{\|S_k\|}.\end{aligned} \quad (3.35)$$

Analizando el lado de derecho de la desigualdad (3.35) tenemos que, por (3.33), el primer término tiende a cero. Por hipótesis, $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_*$ entonces el segundo término tiende a cero y, por (2.12), el último término también tiende a cero, con lo cual

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|F(X_{k+1})\|}{\|S_k\|} = 0. \quad (3.36)$$

Por la continuidad de la función F , tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(X_{k+1}) = F(X_*) = \mathbf{O}.$$

Después de realizar algunas operaciones algebraicas, usando propiedades de la norma matricial y de (2.11)

$$\begin{aligned}
\|F(X_{k+1})\| &= \|F(X_{k+1}) - F(X_*)\| \\
&= \|L(X_*, E_{k+1}) + F(X_{k+1}) - F(X_*) - L(X_*, E_{k+1})\| \\
&\geq \|L(X_*, E_{k+1})\| - \|F(X_{k+1}) - F(X_*) - L(X_*, E_{k+1})\| \\
&\geq \frac{1}{\|L(X_*, E_{k+1})^{-1}\|} - \|R(E_{k+1})\|. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Por la hipótesis **H4**, tenemos que $\|L(X_*, E_{k+1})^{-1}\| < \beta$. Por otro lado, en el **Teorema 3.2** demostramos que la sucesión $\{X_k\}$ satisface que $\|E_{k+1}\| \leq \frac{1}{2}\|E_k\|$ para todo $k = 0, 1, \dots$. Así que

$$\|E_{k+1}\| \leq \|E_k\| \leq \dots \leq \|E_0\|. \tag{3.38}$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{\|E_{k+1}\|} \geq \frac{1}{\|E_k\|} \geq \dots \geq \frac{1}{\|E_0\|} \tag{3.39}$$

y de (2.12), tenemos que para $\rho < \frac{1}{\beta \|E_0\|}$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $\|E_{k+1}\| < \epsilon$ entonces $\|R(E_{k+1})\| < \rho \|E_{k+1}\|$. Así, usando (3.39) en (3.37), tenemos

$$\begin{aligned}
\|F(X_{k+1})\| &\geq \frac{1}{\beta} - \rho \|E_{k+1}\| \\
&= \left[\frac{1}{\beta \|E_{k+1}\|} - \rho \right] \|E_{k+1}\| \\
&\geq \left[\frac{1}{\beta \|E_0\|} - \rho \right] \|E_{k+1}\| \\
&= \alpha \|E_{k+1}\|, \tag{3.40}
\end{aligned}$$

donde $\alpha = \left(\frac{1}{\beta \|E_0\|} - \rho \right) > 0$. Combinando (3.36) y (3.40),

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|F(X_{k+1})\|}{\|S_k\|} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha \|E_{k+1}\|}{\|S_k\|} \\
&= \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_{k+1} - E_k\|} \geq \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_{k+1}\| + \|E_k\|} \\
&= \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\|}}{\frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\|} + 1}
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\|} = 0.$$

Por lo tanto, si (3.33) se satisface entonces la sucesión $\{X_k\}$ converge superlinealmente a X_* . \blackbox

A continuación, presentamos un resultado útil para demostrar que el **Algoritmo 3.1** satisface la **condición tipo Dennis-Moré** dada por (3.33).

Lema 3.4. *Supongamos las hipótesis **H1** a **H4**, las sucesiones $\{X_k\}$ y $\{A_k\}$ generadas por (3.4) y (3.5), respectivamente y que $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_*$. Entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_{k+1}S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} = 0. \quad (3.41)$$

Demostración. Por el **Teorema 3.1**, la matriz A_{k+1} es la única matriz que satisface la ecuación secante matricial

$$A_{k+1}S_k = Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k). \quad (3.42)$$

Por la hipótesis **H1**,

$$F(X_{k+1}) = F(X_k) + L(X_k, S_k) + R(S_k), \quad (3.43)$$

donde

$$\lim_{\|S_k\| \rightarrow 0} \frac{\|R(S_k)\|}{\|S_k\|} = 0. \quad (3.44)$$

Usando las ecuaciones (3.42), (3.43) y (3.44), algunas manipulaciones algebraicas, la desigualdad triangular y el **Lema 3.2** obtenemos

$$\begin{aligned}
\|A_{k+1}S_k - L(X_*, S_k)\| &= \|F(X_{k+1}) - F(X_k) - L(X_*, S_k)\| \\
&= \|L(X_k, S_k) - L(X_*, S_k) + R(S_k)\| \\
&\leq \|L(X_k, S_k) - L(X_*, S_k)\| + \|R(S_k)\| \\
&\leq \gamma \|X_k - X_*\| \|S_k\| + \|R(S_k)\|, \tag{3.45}
\end{aligned}$$

multiplicando la desigualdad (3.45) por $\|S_k\|^{-1}$ tenemos

$$\frac{\|A_{k+1}S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} \leq \gamma \|X_k - X_*\| + \frac{\|R(S_k)\|}{\|S_k\|}. \tag{3.46}$$

Dado que, $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_*$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k - X_*\| = 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k\| = 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_{k+1}S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} = 0. \quad \spadesuit$$

Con el resultado anterior, se puede derivar una condición suficiente para garantizar convergencia superlineal del **Algoritmo 3.1**, como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Supongamos las hipótesis **H1** a **H4** y que las sucesiones $\{X_k\}$ y $\{A_k\}$ son generadas por (3.4) y (3.5), respectivamente y que $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_*$. Si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - A_{k+1} S_k\|}{\|S_k\|} = 0, \tag{3.47}$$

entonces la sucesión $\{X_k\}$ converge superlinealmente a X_* .

Demostración. Adicionando $A_{k+1}S_k$ y usando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - A_{k+1} S_k + A_{k+1} S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} \tag{3.48} \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - A_{k+1} S_k\|}{\|S_k\|} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_{k+1} S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|}.
\end{aligned}$$

Por el **Lema 3.4**,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_{k+1}S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} = 0$$

y el segundo término del lado derecho de la desigualdad (3.48) es cero por la hipótesis (3.47). Luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - L(X_*, S_k)\|}{\|S_k\|} = 0, \quad (3.49)$$

esta es la condición suficiente del **Teorema 3.3**. Por lo tanto, la sucesión $\{X_k\}$ generada por el **Algoritmo 3.1** converge superlinealmente a X_* . \boxtimes

Con los resultados demostrados en este capítulo tenemos que bajo las hipótesis **H1** a **H4**, la sucesión $\{X_k\}$ generada por el Algoritmo 3.1 converge localmente lineal y superlinealmente a X_* , lo cual resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Supongamos las hipótesis **H1** a **H4** y que la sucesión $\{A_k\}$ está definida por (3.5). Existen constantes positivas ϵ y δ tales que si $\|X_0 - X_*\| \leq \epsilon$ y $\|A_0 S_0 - L(X_*, S_0)\| \leq \delta$, entonces la sucesión $\{X_k\}$ generada por*

$$X_{k+1} = X_k - A_k^{-1} F(X_k)$$

está bien definida y converge linealmente a X_ . Además, si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A_k S_k - A_{k+1} S_k\|}{\|S_k\|} = 0$$

entonces la sucesión $\{X_k\}$ converge superlinealmente a X_ .*

Demostración. Es una aplicación directa de los **Teoremas 3.2, 3.3 y 3.4**. \boxtimes

CAPÍTULO 4

PRUEBAS NUMÉRICAS

En este capítulo, exploramos numéricamente el comportamiento local del *método secante de cambio mínimo* estudiado teóricamente en el Capítulo 3. Para ello, consideramos un problema que guarda una estrecha relación con la llamada *función cuadrática matricial* y el cual es conocido como el *problema de los valores propios cuadrático* [26][27][50].

En particular, *las frecuencias y los modos naturales* de una estructura son la solución de un *problema de valores propios* que es *cuadrático* cuando los efectos de amortiguamiento se incluyen en el modelo [50]. Los *modos naturales de vibración* de un sistema son los posibles movimientos armónicos que pueden tener lugar en el sistema en condiciones de excitación nula. La *frecuencia natural* de una estructura es la frecuencia con la cual ella vibra. Similitud entre *frecuencias y modos* puede ocasionar graves problemas prácticos. Este fenómeno se presentó en el puente del *río Támesis*, conocido como *el puente del milenio* [50] cuando en su inauguración (junio de 2000) las fuerzas externas generadas por el movimiento sincronizado de los asistentes y la acción probable de los fuertes vientos, produjeron similitud entre los *modos naturales de vibración* de la estructura del puente y *la frecuencia* de los pasos de los peatones.

Otras aplicaciones del *problema de los valores propios cuadrático* son: *análisis dinámico de mecánica estructural y sistemas acústicos, simulación de un circuitos eléctricos, mecánica de fluidos, procesamiento de señales, problema de vibración y modelamiento de sistemas mecánicos microelectrónicos* [11][12][33][47].

Un excelente resumen sobre el *problema de los valores propios cuadrático* se presenta en [50], en él, los autores incluyen numerosas aplicaciones con su motivación, características, resultados teóricos y detalles algorítmicos.

A continuación, hacemos una breve descripción teórica del *problema de los valores propios cuadrático* motivada a partir de la *función cuadrática matricial* (2.24). Posteriormente, aplicamos el **Algoritmo 3.1** para calcular los valores propios en tres casos particulares incluyendo un problema de aplicación conocido como un *sistema masa-resorte amortiguador*.

4.1. El problema de los valores propios cuadrático

El problema de encontrar los ceros de una *función cuadrática matricial* consiste en encontrar una matriz $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}. \quad (4.1)$$

Este problema surge en *teoría de control* [13][26].

Una solución X del problema (4.1) se llama un *solvente* [2][18][26][33][50]. Un aspecto importante sobre la existencia de *solventes* es que el *Teorema Fundamental del Algebra* no se extiende a polinomios matriciales. Tal es el caso de la ecuación cuadrática matricial

$$X^2 = A, \quad (4.2)$$

la cual, si A es singular, no siempre tiene solución [29].

En el caso que los *solventes* existan, una pregunta natural que surge al estudiar la *ecuación cuadrática matricial* es ¿existe una fórmula cerrada para los *solventes* tal como sucede con la *fórmula cuadrática escalar*? La respuesta es afirmativa sólo cuando $A = I_n$, las matrices B y C conmutan y la raíz cuadrada de $B^2 - 4C$ existe, en este caso, la solución está dada por la matriz

$$X = \frac{1}{2} [-B + (B^2 - 4C)^{1/2}], \quad (4.3)$$

donde $(B^2 - 4C)^{1/2}$ denota la raíz cuadrada matricial de $B^2 - 4C$ [27].

El problema (4.1) es una de las ecuaciones no lineales matriciales más sencillas. Una completa caracterización de sus soluciones en términos de la generalización de la *descomposición de Schur* se presenta en [26]. En dicho trabajo, se describen y comparan

varias técnicas numéricas de solución y a partir de trabajos anteriores, se realiza el proceso de generalización y unificación para obtener nuevos resultados.

En [27], los autores proponen el *método de Newton con búsqueda lineal exacta* para resolver el problema (4.1) basados en el hecho de que la incorporación de una estrategia de *búsqueda lineal* [15][43] tiene bajo costo computacional y mejora el desempeño del método, tanto en la teoría como en la práctica.

En gran parte, el estudio del problema (4.1) ha sido motivado por el problema conocido como *el problema de los valores propios cuadrático* que consiste en encontrar escalares λ y vectores no nulos \mathbf{x} y $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, tales que

$$Q(\lambda)\mathbf{x} = (\lambda^2 A + \lambda B + C)\mathbf{x} = 0, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y}^* Q(\lambda) = \mathbf{y}^* (\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0, \quad (4.5)$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{y} son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz $Q(\lambda)$ correspondientes al valor propio λ . En este contexto, la matriz

$$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C, \quad (4.6)$$

cuyas componentes son polinomios en λ de grado menor o igual a 2, es conocida como una *matriz* $Q(\lambda)$ [2][18][50]. Algunas de sus características son las siguientes:

- El *espectro* de $Q(\lambda)$ es el conjunto

$$\sigma(Q(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det[Q(\lambda)] = 0\}. \quad (4.7)$$

Cuando el determinante de $Q(\lambda)$ *no es igual a cero para todos los valores de λ* , la matriz $Q(\lambda)$ es llamada *regular*; en otro caso, es llamada *no regular*.

- El *polinomio característico* de $Q(\lambda)$, denotado por $\det[Q(\lambda)]$, está dado por

$$\det[Q(\lambda)] = \det(A)\lambda^{2n} + \text{términos de grado inferior}. \quad (4.8)$$

Si la matriz A es no singular, $Q(\lambda)$ es *regular* y el *polinomio característico* de $Q(\lambda)$ tiene grado $2n$, con lo cual se tiene $2n$ valores propios *finitos* [50].

Si A es singular ($\det(A) = 0$), el *polinomio característico* tiene grado r , con $r < 2n$. En este caso, $Q(\lambda)$ tiene r valores propios *finitos* a los cuales se le adicionan $2n - r$ valores propios *infinitos* [2][50]. Los valores propios *infinitos* corresponden a valores propios cero del *polinomio reverso* definido por $\lambda^2 Q(\lambda^{-1}) = \lambda^2 C + \lambda B + A$ [2][50].

- La *multiplicidad algebraica* de un valor propio λ es la multiplicidad de λ como raíz del *polinomio característico* y la *multiplicidad geométrica* de λ es la dimensión del *núcleo* de $Q(\lambda)$.

Para ilustrar las dos primeras características de la matriz $Q(\lambda)$ presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. [Tisseur and Meerbergen 2001, pág. 256]. Consideremos el polinomio matricial cuadrático de tamaño 3×3

$$Q(\lambda) = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o equivalentemente,

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda + 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como podemos observar, la matriz A es singular. Además, la matriz $Q(\lambda)$ es regular porque $\det[Q(\lambda)] = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1$ no es idénticamente cero para todos los valores de λ . Puesto que el grado del polinomio característico de $Q(\lambda)$ es $r = 4 < 6 = 2n$, la matriz $Q(\lambda)$ tiene 4 valores propios finitos y dos valores propios infinitos; en efecto, ellos son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ y $\lambda_5 = \lambda_6 = \infty$.

En lo que sigue, haremos referencia al problema (4.4) como *el problema de los valores propios cuadrático*. Este problema es posible reducirlo a un problema de *valores propios generalizados*, el cual consiste en encontrar escalares λ y vectores no nulos $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, tales que

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x},$$

donde $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ [52][20]. Para ello, supongamos que la matriz X es una solución de (4.1) y mediante operaciones algebraicas, obtenemos

$$\begin{aligned} C &= -BX - AX^2 \\ \lambda^2 A + \lambda B + C &= -BX - AX^2 - \lambda AX + \lambda^2 A + \lambda B + \lambda AX \\ &= -[B + AX + \lambda A]X + \lambda[B + AX + \lambda A] \\ &= -[B + AX + \lambda A][X - \lambda I_n], \end{aligned}$$

es decir,

$$Q(\lambda) = -[B + AX + \lambda A][X - \lambda I_n], \quad (4.9)$$

por lo tanto, los valores propios de $Q(\lambda)$ son los valores propios de X junto con los del problema de valores propios generalizado

$$(B + AX)\mathbf{x} = -\lambda A\mathbf{x}. \quad (4.10)$$

Nuestro objetivo con respecto al *problema de los valores propios cuadráticos* es encontrar los valores propios de la matriz $Q(\lambda)$. Este problema lo podemos abordar como la solución de dos subproblemas:

1. Encontrar una solución del Problema (4.1) y de ella obtener sus valores propios.
2. Encontrar los valores propios de las matrices $(B + AX)$ y $-A$, donde X es la matriz solución del subproblema anterior.

4.2. Algoritmos

A continuación y para mayor claridad incluimos *el algoritmo del método secante matricial de cambio mínimo*, **Algoritmo 4.1**, estudiado teóricamente en el Capítulo 3, el cual usaremos para resolver el subproblema 1. Una ampliación de este algoritmo, **Algoritmo 4.2**, nos permitirá resolver el subproblema 2 y así resolver el *problema de los valores propios cuadrático*, en lo que al cálculo de los valores propios de $Q(\lambda)$ se refiere.

Algoritmo 4.1. Dadas las matrices $X_{-1}, X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Definimos $S_{-1} = X_0 - X_{-1}$.

Definimos $Y_{-1} = F(X_0) - F(X_{-1})$.

Resolvemos $A_0 S_{-1} = Y_{-1}$ para A_0 .

Para $k = 0, 1, \dots$,

Resolvemos $A_k S_k = -F(X_k)$ para S_k .

Actualizamos X_k utilizando $X_{k+1} = X_k + S_k$.

Definimos $Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$.

Actualizamos A_k resolviendo $A_{k+1}S_k = Y_k$ para A_{k+1} .

$k \leftarrow k + 1$.

fin.

El **Algoritmo 4.2** es un algoritmo híbrido que usa el **Algoritmo 4.1** siendo F , la *función cuadrática matricial* (2.24) para obtener un *solvente* de la Ecuación (4.1) y dos sentencias de MATLAB[®] : la primera para encontrar *los valores propios* del *solvente* hallado y la segunda para encontrar *los valores propios generalizados* de las matrices $(B + AX)$ y $-A$.

Algoritmo 4.2. Dadas las matrices $X_{-1}, X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

P.1: Calculamos S_{-1} .

P.2: Encontramos la solución W_0 del sistema

$$W_0 S_{-1} = A (X_0^2 - X_{-1}^2).$$

P.3: Calculamos $A_0 = W_0 + B$.

P.4: Para $k = 0, 1, \dots$,

Mientras $\text{Res}(X_k) \leq n * \text{eps}$ y $k < N$

P.5: Resolvemos $A_k S_k = -F(X_k)$ para S_k .

P.6: Actualizamos X_k usando $X_{k+1} = X_k + S_k$.

P.7: Encontramos la solución W_{k+1} del sistema

$$W_{k+1} S_k = A (X_{k+1}^2 - X_k^2).$$

P.8: Actualizamos A_k utilizando $A_{k+1} = W_{k+1} + B$.

P.9 $k \leftarrow k + 1$

P.10: Hallamos los valores propios de la solución X_* obtenida en los pasos anteriores, usando la sentencia de MATLAB[®]

$$\text{eig}(X_*).$$

P.11. Definimos la matriz $D = B + AX_*$.

P.12: Hallamos los valores propios generalizados de (4.10) usando la sentencia de MATLAB[®]

$$\text{eig}(D, -A).$$

fin.

Es importante mencionar sobre la inclusión de algunas variables en el **Algoritmo 4.2**. En el paso **P.2**, encontramos la matriz W_0 que resulta de lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_0 S_{-1} &= F(X_0) - F(X_{-1}) \\ &= A(X_0^2 - X_{-1}^2) + B(X_0 - X_{-1}), \end{aligned}$$

pero $S_{-1} = X_0 - X_{-1}$ entonces $A_0 = A(X_0^2 - X_{-1}^2)(S_{-1})^{-1} + B$. Así, definiendo la matriz $W_0 = A(X_0^2 - X_{-1}^2)(S_{-1})^{-1}$ tenemos que

$$W_0 S_{-1} = A(X_0^2 - X_{-1}^2)$$

y por lo anterior, en el paso **P.3** definimos $A_0 = W_0 + B$. En forma análoga, se obtienen las variables W_{k+1} y A_{k+1} , respectivamente, en los pasos **P.7** y **P.8**.

Escribimos los códigos de los algoritmos y de las funciones de prueba en MATLAB[®] y realizamos los experimentos numéricos en un computador Intel (R) Core (TM) i5-3450 de 2.8 GHz.

En las pruebas numéricas, consideramos las matrices iniciales y el criterio de parada utilizados en [26][41][50], a saber: $X_{-1} = 0.1I_n$ y $X_0 = \beta I_n$; adicionalmente, usamos $X_0 = 10^r I_n$ para algunos valores particulares de r . En este contexto, I_n denota la matriz identidad de orden n y β es una constante dada por

$$\beta = \frac{\|B\|_F + \sqrt{\|B\|_F^2 + 4\|A\|_F\|C\|_F}}{2\|A\|_F}$$

donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma matricial de *Frobenius* [26][41]. Para el criterio de parada, definimos

$$\text{Res}(X_k) = \frac{\|Q(X_k)\|}{\|A\|_F \|X_k\|_F^2 + \|B\|_F \|X_k\|_F + \|C\|_F} \quad (4.11)$$

y declaramos convergencia si $\text{Res}(X_k) < n * \text{eps}$, donde eps denota el épsilon de la máquina, que en nuestro caso, corresponde a $\text{eps} = 2.22044604925031 \times 10^{-16}$. Declaramos divergencia, si el número de iteraciones es mayor que 200.

4.3. Pruebas numéricas

A continuación, usamos el **Algoritmo 4.2** para resolver el *problema de valores propios cuadrático* en tres casos particulares.

Los resultados obtenidos los presentamos en tablas, cada una de las cuales tiene tres columnas con la siguiente información: la primera (X_0) indica la matriz inicial utilizada; la segunda (MS) indica el número de iteraciones utilizado por el **Algoritmo 4.2** y la tercera columna ($Res_{MS}(X_k)$) hace referencia al criterio de parada del **Algoritmo 4.2**.

1. **Problema 1** [26]. Calcular los valores propios de $Q(\lambda)$, si

$$Q(X) = X^2 + X + C = \mathbf{O}, \quad (4.12)$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La Ecuación (4.12) tiene dos los solventes:

$$X_*^1 = \begin{bmatrix} -2 & -1/3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_*^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En la Tabla 4.1 presentamos los resultados obtenidos con el **Algoritmo 4.2**. Observamos que para las diferentes matrices iniciales la convergencia se obtiene prácticamente en el mismo número de iteraciones. La solución obtenida al subproblema 1 es el solvente X_*^2 cuyos valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

La solución al subproblema 2 son los valores propios $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$. Por lo tanto, los valores propios de $Q(\lambda)$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$.

X_0	MS	$Res_{MS}(X_k)$
βI_2	8	2.76162288449527e-017
$10I_2$	10	0.0
$10^4 I_2$	11	2.76162288449527e-017
$10^5 I_2$	11	8.28486865348581e-017
$10^{18} I_2$	11	3.13660064934264e-016
$10^{20} I_2$	11	3.13660064934264e-016

Tabla 4.1: **Problema 1** usando el **Algoritmo 4.2**.

2. **Problema 2** [14]. Calcular los valores propios de $Q(\lambda)$, si

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}, \quad (4.13)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

La Ecuación (4.13) tiene dos solventes:

$$X_*^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_*^2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Los resultados que obtuvimos al aplicar el **Algoritmo 4.2** a este problema, los presentamos en la Tabla 4.2. Al igual que en el **Problema 1**, consideramos diversas matrices iniciales. A partir de estas matrices, la convergencia se obtiene en pocas iteraciones.

La solución obtenida al subproblema **1** es el solvente

$$X_*^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y la solución al subproblema **2** son los valores propios $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$. Por lo tanto los valores propios de $Q(\lambda)$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$.

X_0	MS	$Res_{MS}(X_k)$
βI_2	8	0.0
$10I_2$	10	3.31169876707525e-017
$10^6 I_2$	12	0.0
$10^{13} I_2$	12	0.0
$10^{16} I_2$	10	5.85809908833784e-017
$10^{18} I_2$	13	0.0

Tabla 4.2: **Problema 2** usando el **Algoritmo 4.2**.

3. Problema 3 [41][26][49]. Sistema masa-resorte amortiguador conectado.

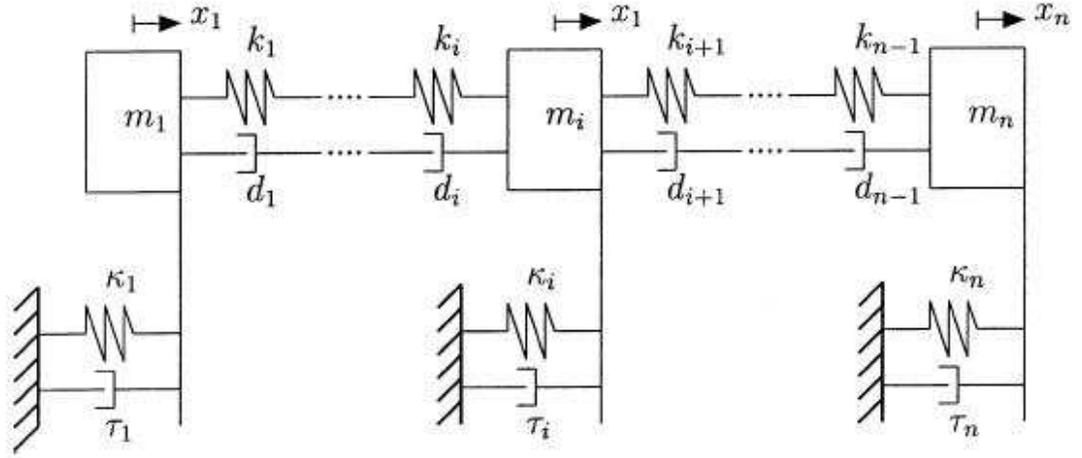


Figura 4.1: Sistema masa-resorte amortiguador conectado.

En este problema se considera un *sistema masa-resorte amortiguador* [51] donde la masa i -ésima de peso m_i está conectada a su $(i + 1)$ vecino por un resorte y un amortiguador con constantes κ_i y d_i , respectivamente. la masa i -ésima también está conectada a la tierra por un resorte y amortiguador con constantes κ_i y τ_i , respectivamente [41][26][49]. La vibración de este sistema está descrita por una ecuación diferencial de segundo orden

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0,$$

donde $A = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ es la *matriz de las masas*, B es la *matriz de amortiguación* y C la *matriz de rigidez*; estas dos últimas son *matrices tridiagonales* simétricas definidas por

$$B = \text{tridiag}(-\tau_i, 3\tau_i, -\tau_i),$$

$$C = \text{tridiag}(-\kappa_i, 3\kappa_i, -\kappa_i).$$

En este problema necesitamos determinar las *frecuencias de oscilación* que están definidas por los valores propios de $Q(\lambda)$ donde $Q(X) = AX^2 + BX + C$.

En las pruebas numéricas tomamos $n = 100$, $m_i = 1$, para todo i , los *resortes* y los *amortiguadores* con un mismo valor constante; es decir, $\kappa_i = \kappa = 5$ y $\tau_i = \tau = 10$, para todo i , excepto $B(1, 1) = B(n, n) = 2\tau = 20$.

Como en los problemas anteriores, consideramos matrices 6 iniciales. Los resultados los presentamos en la Tabla 4.3. Debemos mencionar que para $X_0 = 10^8 I_{100}$ y $X_0 = 10^{11} I_{100}$, el **Algoritmo 4.2** converge en un número de iteraciones levemente superior que para las restantes matrices iniciales.

X_0	MS	$Res_{MS}(X_k)$
βI_{100}	15	1.43027588604463e-014
$10 I_{100}$	11	1.14838579031381e-014
$10^4 I_{100}$	14	1.29922489580737e-014
$10^8 I_{100}$	17	1.60164683715926e-014
$10^{11} I_{100}$	20	1.42112824504438e-014
$10^{16} I_{100}$	12	1.94478821227708e-015

Tabla 4.3: **Problema 3** usando el **Algoritmo 4.2**.

Cabe mencionar que un *problema de valores propios cuadráticos* que surge en *problemas de vibraciones* es *sobreamortiguado* si A y B son matrices simétricas y definidas positivas, C es una matriz semidefinida positiva y

$$(\mathbf{z}^T B \mathbf{z})^2 > 4 (\mathbf{z}^T A \mathbf{z}) (\mathbf{z}^T C \mathbf{z}) \quad (4.14)$$

para todo vector \mathbf{z} no nulo [26][33].

La condición (4.14) en general no es fácil de verificar, pero esta se satisface si

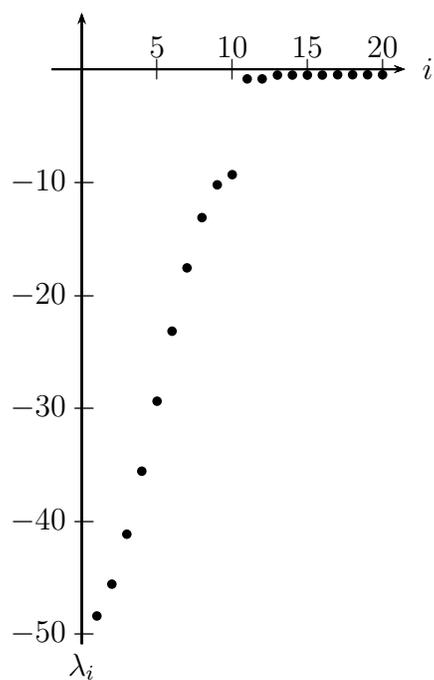
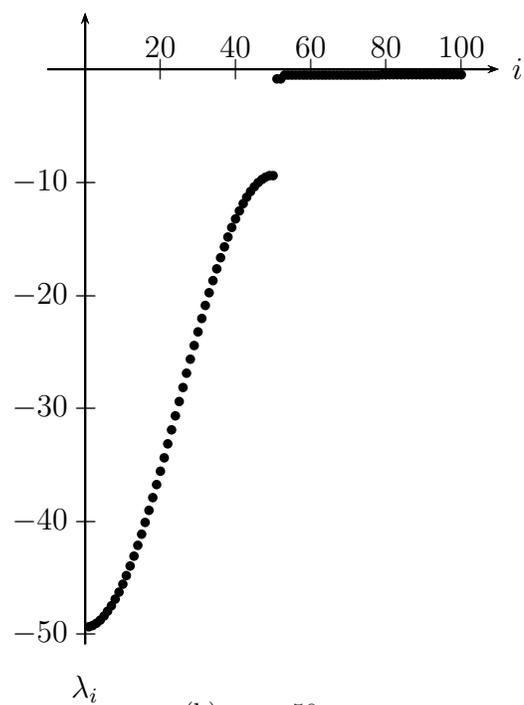
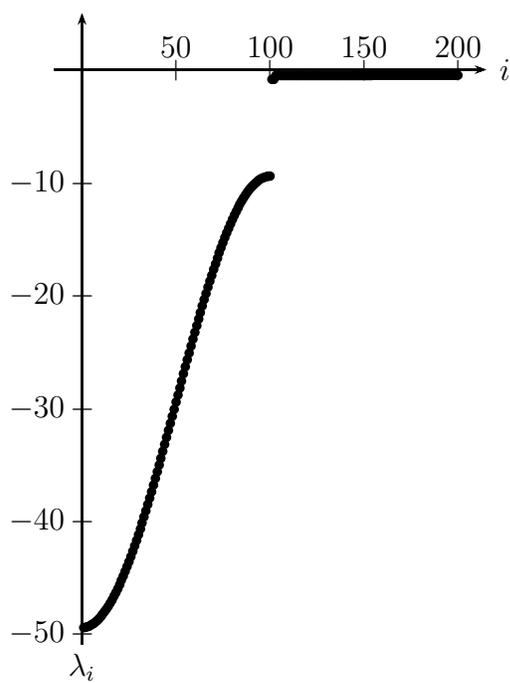
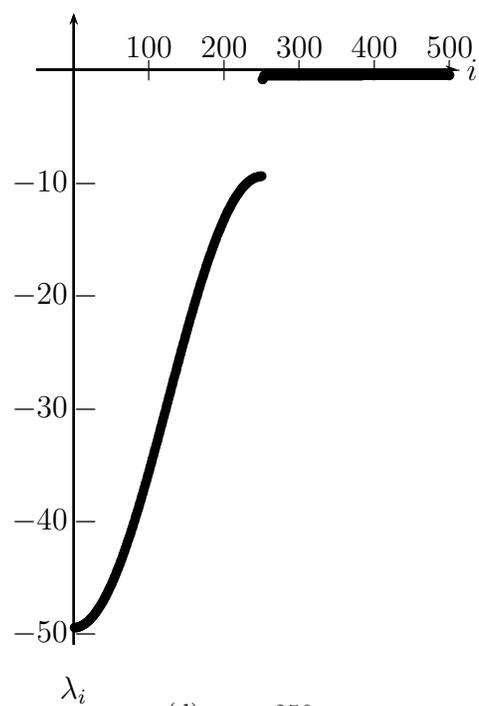
$$\lambda_{\min}(B)^2 - 4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(C) > 0, \quad (4.15)$$

donde $\lambda_{\min}(T)$ y $\lambda_{\max}(P)$ denotan el menor y mayor valor propio de las matrices C y P , respectivamente [26].

Con base en lo anterior, verificamos que el **Problema 3** es *sobreamortiguado* ya que $\lambda_{\min}(B)^2 - 4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(C) = 0.076$, con $\lambda_{\min}(B) = 10$, $\lambda_{\max}(A) = 1$ y $\lambda_{\max}(C) = 24.981$. Además, para esta clase de problemas, los valores propios de la matriz $Q(\lambda)$ son reales no positivos y existe un vacío entre sus n valores propios más grandes y sus n valores propios más pequeños [26][33]. Este es el caso de la matriz $Q(\lambda)$ en el problema que nos ocupa, la cual tiene sus $2n$ valores propios reales

negativos que pertenecen al intervalo $[-49.4850266, -0.5051036]$, pero ninguno de estos valores propios pertenecen al subintervalo $(-9.4419359, -0.8640012)$; o mejor aún, en el intervalo $[-49.4850266, -9.441936]$ $Q(\lambda)$ tiene n valores propios y en el intervalo $[-0.8640012, -0.5051036]$ $Q(\lambda)$ tiene los restantes n valores propios, mostrando un vacío en el intervalo $(-9.4419359, -0.8640012)$.

Para ilustrar lo anterior, realizamos 4 gráficas para algunos valores de n . En cada gráfica, el eje horizontal representa el índice del i -ésimo valor propio de $Q(\lambda)$ y el eje vertical denota el valor propio λ_i (Figura 4.2).

(a) $n = 10$.(b) $n = 50$.(c) $n = 100$.(d) $n = 250$.Figura 4.2: *Valores propios del Problema 3 para algunos valores de n .*

CAPÍTULO 5

COMENTARIOS FINALES

Funciones matriciales y problemas no lineales matriciales surgen en numerosos contextos de la ciencia y de la ingeniería. Este gran número de aplicaciones ha motivado el desarrollo de una teoría sobre *funciones matriciales* que ayude en la solución de *ecuaciones matriciales no lineales*.

Hasta hace poco tiempo el único método numérico para resolver ecuaciones matriciales no lineales era el método de Newton. Recientemente se propone un método tipo secante para resolver problemas matriciales no lineales y se presentan algunas pruebas numéricas que muestran un buen desempeño del método y dejan el camino abierto para investigar más al respecto [42].

En este trabajo de investigación consideramos un método tipo secante propuesto en [42], mostramos que él es un método *secante de cambio mínimo* y bajo hipótesis estandar, desarrollamos una *teoría general de convergencia* para el mismo. Demostramos que este método proporciona un *algoritmo local y superlinealmente convergente*.

Para contribuir con la exploración numérica del método secante mencionado en los párrafos anteriores, analizamos su desempeño numérico con el llamado *problema de los valores propios no lineales*, en tres situaciones particulares. En los 3 casos, el método muestra un buen desempeño numérico.

Finalmente, en búsqueda de ampliar el espectro de trabajo con respecto a problemas matriciales no lineales pensamos que sería conveniente incorporar estrategias de globalización al algoritmo secante y realizar pruebas numéricas del algoritmo globalizado donde se involucren funciones matriciales que no se han considerado y aplicaciones a problemas reales.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Acevedo R., Pérez, R., Arenas, F. *El método DL para resolver sistemas de ecuaciones no lineales*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. 2008, **16**, 23-36.
- [2] Berhanu, M. *The polynomial eigenvalue problem*. PhD. thesis. The University of Manchester. 2005.
- [3] Betcke, T., Higham, N. J., Mehrmann, V., Schröder, C., and Tisseur, F. *NLEVP: A collection of nonlinear eigenvalue problems*. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2013, **39 n 2**, 7.
- [4] Bittani, S. Laub, A. J. and Willems, C. *The Riccati equation*. Springer-Verlag, Berlin. 1991.
- [5] Brown, P. N. and Saad Y. *Convergence theory of nonlinear newton-krylov algorithms*. SIAM Journal on Optimizarions. 1994, **4 n 2**, 297-330.
- [6] Broyden, C. G. *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*. Mathematics of computation. 1965, **19 n 92**, 577-593.
- [7] Broyden, C. G. Dennis, J. E. and Moré, J. J. *On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods*. Departament of Computer Science, Cornell University. 1996.

- [8] Chehab, J. P. and Raydan, M. *Implicit and adaptive inverse preconditioned gradient methods for nonlinear problems*. Applied numerical mathematics. 2005, **55 n 1**, 32-47.
- [9] Chehab, J. P. and Laminie, J. *Differential equations and solution of linear systems*. Numerical Algorithms. 2005, **40 n 2**, 103-124.
- [10] Cheng, S. H., Higham, N. J., Kenney, C. S., and Laub, A. J.. *Approximating the logarithm of a matrix to specified accuracy*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2001, **22 n 4**, 1112-1125.
- [11] Clark, J.V Zhou, N. and Pister, K.S.J. *Modified nodal analysis for MEMS with multienergydomains*. International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators, San Diego, CA. March 27-28. 2000.
- [12] Clark, J.V Zhou, N. and Pister, K.S.J. *Nodal simulation for MEMS design using SUGAR v0.5*. International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators, Santa Clara, CA. 1988, 308-313.
- [13] Datta, B. *Numerical methods for linear control systems. Design and Analysis*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 2003.
- [14] Davis, J.G. *Numerical solution of a quadratic matrix equation*. Elsevier Academic Press. 1981, **2 n 2**, 164-175.
- [15] Dennis, J. E. and Schnabel, R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice-Hall, New Jersey. 1983.
- [16] Dennis, J. E. and Schnabel, R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice-Hall, New Jersey. 1983, p.181.
- [17] Dennis, J. E. and Walker, H. F. *Convergence theorems for least-change secant update methods*. SIAM. 1981, **18 n 6**.
- [18] Dennis, J.E. Jr, Traub, J.F. and Weber, R.P. *The algebraic theory of matrix polynomials*. SIAM. 1976, **15**, 832-845.
- [19] Golub, H. G., Nash and Van Loan, *Hessenberg-Shurt method for the problem $AX+XB=C$* . IEEE Trans. Automat. Control. 1979, **24**, 909-913.

- [20] Golub, H. G. and Van Loan, C. F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press. Third edition. 1996.
- [21] Gomes-Ruggeiro M.A. and Martínez J.M. *The column-updating method for solving nonlinear equations in Hilbert space*. RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 1992, **26**, 309-330.
- [22] González, S. D. *Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach*. PhD. thesis. Universidad de la Rioja. 2012.
- [23] Gutiérrez, J. J. *El método de Newton en espacios de Banach*. PhD. thesis. Universidad de la Rioja. 2006.
- [24] Hashemi, B. and Dehghan, M. *Efficient computation of enclosures for the exact solvents of a quadratic matrix equation*. ELA. 2010, **20**, 519-536.
- [25] Higham, N. J. *Functions of matrices theory and computations*. SIAM. 2008.
- [26] Higham, N. J. and Kim, H. *Numerical analysis of a quadratic matrix equation*. IMA Journal of numerical analysis. 2000, **20**, 499-519.
- [27] Higham, N. J. and Kim, H. *Solving a quadratic matrix equation by Newton's methods with exact line searches*. SIAM. 2001, **23 n 2**, 303-316.
- [28] Higham, N. J. *Stable iterations for the matrix square root*. Numerical Algorithms. 1997, **15 n 2**, 227-242.
- [29] Horn, R.A. and Johnson, C.R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press. 1991.
- [30] Israel, R. B, Rosenthal, J. S and Wei, J. Z. *Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings*. Mathematical Finance. 2001, **11 n 2**, 245-265.
- [31] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley & Sons Canadá. 1978, p.144.

- [32] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley & Sons Canadá. 1978, p.96.
- [33] Lancaster, P. *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*. Pergamon Press, Oxford, UK. 1966.
- [34] Lancaster, P. and Rodman, L. *Algebraic Riccati equations*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. 1995.
- [35] Majda, A. J. and Tabak, E. G. *A two-dimensional model for quasigeostrophic flow: comparison with the two-dimensional Euler flow*. Computational and Applied Mathematics Physica D: Nonlinear Phenomena. 1996, **98 n 2**, 515-522.
- [36] Martínez, J. M. *Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems*. Journal of computational and applied mathematics. 2000, **124 n 1-2**, 97-121.
- [37] Martínez, J. M. *Local convergence theory of inexact Newton methods based on structured least change updates*. Mathematics of computation. 1990, **55 n 191**, 143-167.
- [38] Martínez, J. M. *On the relation between two local convergence theories of least-change secant updates methods*. Mathematics of computation. 1992, **59 n 200**, 457-481.
- [39] Martínez, J. M. and Santos S. A. *Métodos computacionais de otimização*. 20° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA 1995, p. 87.
- [40] Monsalve, M. *Block linear method for large scale Sylvester equations*. Computational and Applied Mathematics. 2008, **27 n 1**, 47-59.
- [41] Monsalve, M. and Raydan, M. *Newton's method and secant methods: A long-standing relationship from vectors to matrices*. Numerical linear algebra in signals, systems and control. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer 2011, **80**, 387-412.
- [42] Monsalve, M. and Raydan, M. *A secant method for nonlinear matrix problems*. Portugaliae Mathematica. 2011, **68**, 431-475.
- [43] Nocedal, J. and Wright, J. G. *Numerical Optimizations*. Springer-Verlag. New York 1999.

- [44] Parks, P. C. *AM Lyapunov's stability theory -100 years on*. IMA journal of Mathematical Control and Information. 1992, **9 n 4**, 275-303.
- [45] Pérez, R. and Díaz, T. *Minimización sin restricciones*. Editorial Universidad del Cauca. 2010.
- [46] Sachs, E.W. *Broyden's method in Hilbert space*. Matth. Programming. 1986, **35**, 71-82.
- [47] Smith, H.A. Singh, R.K. and Sorensen, D. C. *Formulation and solution of the nonlinear, damped eigenvalue problem for skeletal systems*. Internat. J. Numer. Methods Engrg. 1995, **38**, 3071-3085.
- [48] Sylvester, J. J. *Sur l'équation en matrices $px=xp$* . C.R: Acad. Sci. Paris. 1884, **67-71**, 115-116.
- [49] Tisseur, F. *Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems*. Linear Algebra and its Applications. 2000, **309**, 339-361.
- [50] Tisseur, F. and Meerbergen, K. *The quadratic eigenvalue problem*. SIAM. 2001, **43 n 2**, 235-286.
- [51] Thomson, W. T. *Teoría de vibraciones con aplicaciones*. Dossat. 1983, p.184.
- [52] Watkins, D. S. *Fundamentals of matrix computations*. Wiley-Interscience. 2002.