Un estudio numérico de métodos tipo Newton para encontrar puntos de periodo p de sistemas dinámicos

Ana Milena Plaza [*] Rosana Pérez [**]

Resumen

En este trabajo se considera el problema de encontrar puntos fijos de periodo p de órbitas periódicas de cuatro funciones tomadas de la literatura reciente. Dado que dicho problema es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones no lineales, se consideran para su solución los métodos de Newton [3] , Davidchack y Lai [2] e Inverso de actualización de Columna [7], con el objetivo de hacer un análisis numérico del comportamiento local de dichos métodos en la solución del problema para distintos valores de p. Además, para $p = 2, 3, 9$ y 10 se hizo una estimación del tamaño del "basin" de todos los puntos fijos encontrados por cada uno de los métodos. Este análisis, además de permitir verificar la dificultad en la determinación de puntos de periodo p a medida que el tamaño de p aumenta, permitió, para nuestro conjunto de experimentos, observar el buen desempeño del método ICUM en estos casos, lo cual lo convierte en una buena alternativa frente a las dificultades que presentan los otros dos métodos que son los tradicionalmente usados en la solución del problema mencionado. El análisis estadístico es complementado con gráficos que ilustran el cambio en el tamaño del "basin" a medida que p aumenta.

Palabras Claves: Sistemas no lineales, Métodos tipo Newton, punto fijo, "Basin".

[*]Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, (Cauca), Colombia (a.plaza@atenea.ucauca.edu.co).
[**]Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, (Cauca). (rosana@atenea.ucauca.edu.co).

1. Introducción

Dada una función $F : I\!R^n \rightarrow I\!R^n$, se denomina órbita de orden p, del punto x_0 por la función F, al conjunto $\{x_0,\ F(x_0),\ F^2(x_0),\ \cdots\ F^p(x_0) :\ F^p(x_0) = x_0,\ \}$. En este contexto se dice que un punto x_0 es estable si los puntos cercanos a él producen una órbita que conduce a x_0, por lo tanto, un punto inestable produce para puntos cercanos a x_0 una órbita que se aleja del mismo [1].

Las órbitas periódicas son determinantes en la explicación de dinámicas caóticas. Una buena definición de caos requiere de la existencia de un número infinito de órbitas periódicas. En un sistema caótico, el número de órbitas periódicas inestables se incrementa exponencialmente con el periodo, $N_p \approx \mathbf{e}^{hp}$, donde $h > 0$, es la entropía topológica de un conjunto caótico [2].

Si se define la función $H : I\!R^n \rightarrow I\!R^n$, como $H = F^p - \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden n, el cálculo de puntos fijos periodo p de órbitas periódicas, se reduce a resolver, para cada p, un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$H(x) = 0. \tag{1}$$

Uno de los métodos frecuentemente usados para resolver (1), por sus buenas propiedades de convergencia, es el tradicional método de Newton [3] [7]. Dado $x^0 \in I\!R^n$, una estimación inicial de la solución de (1), este método considera, en cada iteración, la aproximación

$$H(x) \quad \approx \quad L_k(x) \equiv H(x_k) + J(x_k)(x - x_k), \tag{2}$$

y x_{k+1} se define como la solución del sistema lineal $L_k(x) = 0$. Esta solución existe y es única si la matriz Jacobiana de H en x^k, denotada $J(x_k)$, es no singular; por lo tanto, este método genera una secuencia de aproximaciones a la solución de (1) de la forma;

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}H(x_k). \tag{3}$$

Así , en cada iteración del método de Newton, se debe computar la matriz $J(x_k)$, y resolver el sistema lineal $J(x_k)s_k = -H(x_k)$, lo cual es generalmente difícil y/o computacionalmente costoso.

El inconveniente que presenta el método de Newton en la localización de órbitas periódicas es que a medida que el periodo p se incrementa, el número de puntos iniciales que convergen a una solución, (tamaño del "basin" de dicha solución), disminuye exponencialmente con el tamaño de dicho periodo [2]. Con el fin de remediar este inconveniente surge el método de Schmelcher-Diakonos [5], el cual es una variante del método de Newton, con la ventaja de ampliar el "basin" a medida que el periodo aumenta y la desventaja de convergencia lenta con dichos valores de p. Una iteración del método de Schmelcher-Diakonos es descrita por

$$x_{k+1} = x_k + \lambda C H(x_k), \tag{4}$$

donde λ es un número positivo pequeño y C es una matriz de orden n, llamada *matriz de intercambio* o *matriz bandera*, cuyas componentes $c_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ y cada fila o columna contiene solamente un elemento no nulo [2] [1].

Observe que el método de Schmelcher-Diakonos usa una aproximación a la inversa de la matriz Jacobiana de H, es decir es un método cuasi-Newton [4] [7], y a la luz de la teoría de estos métodos es claro por qué la velocidad de convergencia disminuye. Con el uso de la matriz λC, la cual es no singular, se pueden generar diferentes direcciones que aseguran la localización de órbitas periódicas de cualquier orden. La desventaja respecto al método de Newton está en que la aproximación que se usa no tiene información de $H'(x)$, ya que es constante.

Davidchack y Lai [2], proponen un algoritmo (**DL**) el cual intenta conciliar las ventajas de los dos métodos mencionados anteriormente. Este método se obtiene a partir del siguiente esquema:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda C H(x_{k+1}),$$

sustituyendo $H(x_{k+1})$ por su aproximación afín, dada en (2) se obtiene:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda C H(x_k) + \lambda C J(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

haciendo $\lambda = 1/\beta$, se tiene que una iteración de **MDL** es descrita por:

$$x_{k+1} = x_k + [\mathbf{I}\beta - C J(x_k)]^{-1} C H(x_k), \tag{5}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden n, C es la matriz descrita en el método de Schmelcher-Diakonos y β es un número no negativo que crece exponencialmente con el periodo p [2]. El afinamiento del número β incrementa el tamaño del "basin" de las soluciones de (1) focalizadas por la matriz C. Por tanto, el objetivo de la matriz C, desde el punto de vista geométrico, es establecer direcciones que permitan encontrar diferentes soluciones del sistema (1), lo cual, desde un punto de vista algebraico, significa estabilizar la matriz jacobiana $J(x)$ en el sentido de que sus valores propios tengan parte real negativa. Es importante observar que para C de orden n, existen $2^n\, n!$ matrices bandera de tipo C.

El método **DL**, en el caso unidimensional, es una variante del método de Newton que modifica la derivada de la función H en un valor constante e igual a β. El objetivo es que la recta tangente cambie de dirección, con el fin de forzar la convergencia en los casos en que la derivada H' tome valores cercanos a cero o valores muy grandes en vecindades de la raíz. Así, si la pendiente es grande, se debe buscar disminuir la inclinación de la recta tangente, y si la recta tangente es casi paralela al eje x, se busca aumentar su pendiente. Por tanto, el método **DL** genera una secuencia de rectas secantes cuyas pendientes son las modificaciones de las rectas tangentes respectivas.

Además de los métodos de Newton y **DL**, se considera en este trabajo un método cuasi-Newton del tipo secante [3] propuesto en [8] y conocido como Método Inverso de actualización de Columna, **ICUM.** Propiedades de convergencia de dicho método se mostraron en [6]. El interés en incluir este método se debe a su buen desempeño en el cálculo de puntos de periodo p de la función de Hénon [10]. Una iteración de **ICUM** es descrita por:

$$x_{k+1} = x_k + B_k^{-1} H(x_k),$$

donde B_k^{-1} es una matriz que aproxima la inversa del Jacobiano y es actualizada de la siguiente forma:

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{(s_k - B_k^{-1} y_k)\mathbf{e}_{j_k}^T}{\mathbf{e}_{j_k}^T y_k},$$

con, $y_k = H(x_{k+1}) - H(x_k)$ y $|\mathbf{e}_{j_k}^T y_k| = \|y_k\|_\infty$.

En el presente trabajo se consideran los métodos de Newton (**Newton**), Davidchack y Lai **DL**, Inverso de actualización de Columna (**ICUM**) para la determinación de puntos fijos de cuatro funciones de interés en el estudio de órbitas periódicas, tomadas de la literatura reciente [2] [1]. Se realiza un análisis numérico del comportamiento local de dichos métodos en la determinación de puntos fijos de periodo $p = 3, 4, 7, 9,$ y 10. En el caso de $p = 2$, se realizó un análisis de convergencia desde un punto de vista estadístico estimando intervalos de confianza. Finalmente, se hizo una estimación del tamaño del "basin" de todos los puntos fijos encontrados por cada uno de los métodos. Este análisis permitió verificar no solo la dificultad en la determinación de puntos de periodo p a medida que p aumenta, sino observar el buen desempeño del método **ICUM** en estos casos, lo cual lo convierte en una buena alternativa frente a las dificultades que presentan los otros dos métodos que son los tradicionalmente usados en la solución del problema mencionado. El análisis estadístico es complementado con gráficos que ilustran el cambio en el tamaño del "basin" a medida que p aumenta.

Este trabajo se organiza de la siguiente forma: En la **Sección 2,** se presenta la descripción de la experimentación numérica, estudio y análisis de los resultados de convergencia local de los métodos. En la **Sección 3,** se presenta el análisis estadístico y los gráficos realizados para la determinación del tamaño del "basin" de los puntos fijos encontrados y su variación a medida que aumenta el tamaño del periodo. Finalmente, en la **Sección 3,** se presentan conclusiones y recomendaciones.

2. Comportamiento local de los métodos

Con el interés de estudiar el comportamiento local de los métodos Newton (**MN**), Davidchack y Lai **DL** e Inverso de actualización de Columna (**ICUM**) en la solución del problema (1), consideramos las siguientes funciones $F : I\!R^2 \rightarrow I\!R^2$, tomadas de [2] [1], y definidas por:

- **Función Hénon:**

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}12 - x^2 - 0{,}3y \\ x \end{pmatrix}.$$

- **Función Tinkerbel:**

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 0{,}9x - y^2 - 0{,}6013y \\ 2xy + 2x + 0{,}5y \end{pmatrix}.$$

- **Función Especial o Simple:**

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - 1/3)y \\ x(y-2) \end{pmatrix}.$$

- **Función Cuadrática:**

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 0{,}13 \\ 2xy + 0{,}76 \end{pmatrix}.$$

Para los experimentos numéricos con esas funciones y con los métodos escogidos, los códigos de los algoritmos, funciones y jacobianos fueron escritos en MATLAB 6.0. Todos los experimentos numéricos fueron hechos en un computador AMD K6 (tm)-2, 500MHz.

Cada uno de los métodos escogidos se implementó con las cuatro funciones mencionadas anteriormente y con el mismo conjunto de puntos iniciales. Estos puntos fueron generados de la siguiente forma: Se dividió la región del plano $[-1,1] \times [-1,1]$ en cuatro subregiones a saber: $[0,1] \times [0,1]$; $[-1,0] \times [0,1]$; $[-1,0] \times [-1,0]$; $[0,1] \times [-1,0]$. Usando el generador de vectores de MATLAB versión 6.0, se generaron 100 puntos en la subregión $[0,1] \times [0,1]$ y a cada uno de estos puntos se le aplicó la transformación:

$$\begin{aligned} x(1) &= \pm 1 \pm 2 * (1 - y(1)) \\ x(2) &= \pm 1 \pm 2 * (1 - y(2)) \end{aligned}$$

que permitió ubicar en cada una de las otras 3 subregiones los mismos 100 puntos y obtener un total de 400 puntos iniciales. Se consideraron los siguientes valores de p : 2,3,4,7,9 y 10.

En todas las pruebas numéricas fue usado como criterio de convergencia $\|H(x_k)\|_2 \leq 10^{-6}$. También se suspendió la búsqueda en los algoritmos cuando el número de iteraciones excedió 200 iteraciones o cuando $\|H(x_k)\|_2 \geq 50$. En el último caso decimos que el método diverge.

Por motivos obvios, no es posible presentar en su totalidad los resultados obtenidos usando los 400 puntos iniciales. Por ello, se seleccionó para $p = 3$ y $p = 4$, en cada región, la información de 5 puntos que ilustra la situación general presentada por los métodos con el total de puntos iniciales utilizados. Esta información se presenta en las tablas $1, 2, 3, \cdots, 8$ donde cada columna presenta la información en pares $(k_m\, , \, x^*)$, con k_m el número de iteraciones empleadas por cada uno de los métodos. En caso de convergencia, x^* denota el punto fijo al cual convergen y la letra m hace referencia a la inicial del método usado. El símbolo NC significa que los algoritmos pararon porque alcanzaron el número máximo de iteraciones permitidas por el mismo o el valor de $\|H(x_k)\|_2$ excedió a 50.

Se observa que, a pesar de usar los mismos puntos iniciales, los métodos no necesariamente convergen al mismo punto fijo. Más aún, en algunos casos cada método converge a un punto fijo diferente. Este comportamiento puede tener su origen en que las direcciones de búsqueda de cada método son diferentes y en el caracter local de los mismos. El encontrar puntos fijos diferentes es interesante cuando el objetivo es tener un gran número de soluciones al problema. Desde este punto de vista los métodos se complementan.

Para $p = 3$ y $p = 4$, con los 400 puntos iniciales, se presentaron pocos casos de no convergencia de los métodos. En estas situaciones, uno de los métodos no convergió mientras que los otros dos sí lo hicieron.

En cuanto a eficiencia de los métodos teniendo como base el número de iteraciones por simple inspección es difícil determinar "el método más eficiente", dada la diversidad en cuanto a naturaleza se refiere, de los métodos y de las funciones utilizados. En las tablas se hace evidente lo anterior, por ejemplo: para $p = 3$, con *la función cuadrática,* el método **ICUM** tuvo el mejor desempeño, mientras que para el mismo valor de p, usando *la función especial,* fue el método de **Newton** más eficiente, y usando *la función Tinkerbel* el método **DL** fue ligeramente superior.

$(k_N\ ,\ x^*)$	$(k_I\ ,\ x^*)$	$(k_{DL}\ ,\ x^*)$
$(31, x_5^*)$	$(13, x_4^*)$	$(31, x_5^*)$
$(28, x_5^*)$	$(14, x_3^*)$	$(29, x_5^*)$
$(29, x_5^*)$	$(17, x_3^*)$	$(30, x_5^*)$
$(28, x_5^*)$	$(13, x_3^*)$	$(28, x_5^*)$
$(30, x_5^*)$	$(16, x_3^*)$	$(31, x_5^*)$
$(68, x_6^*)$	$(13, x_4^*)$	$(65, x_6^*)$
$(52, x_6^*)$	$(14, x_3^*)$	$(50, x_6^*)$
$(52, x_6^*)$	$(17, x_3^*)$	$(50, x_6^*)$
$(28, x_5^*)$	$(13, x_3^*)$	$(30, x_6^*)$
$(54, x_6^*)$	$(16, x_3^*)$	$(51, x_6^*)$
$(65, x_6^*)$	$(13, x_3^*)$	$(62, x_6^*)$
$(69, x_6^*)$	$(2, x_6^*)$	$(66, x_6^*)$
$(64, x_6^*)$	$(13, x_4^*)$	$(65, x_6^*)$
$(67, x_6^*)$	$(16, x_4^*)$	$(65, x_6^*)$
$(68, x_6^*)$	$(18, x_4^*)$	$(9, x_6^*)$
$(64, x_6^*)$	$(11, x_4^*)$	$(9, x_7^*)$
$(31, x_5^*)$	$(13, x_4^*)$	$(31, x_5^*)$
$(8, x_4^*)$	$(9, x_4^*)$	$(10, x_7^*)$
$(9, x_4^*)$	$(17, x_4^*)$	$(11, x_7^*)$
$(6, x_4^*)$	$(1, x_4^*)$	$(8, x_7^*)$

Tabla 1: *Función Cuadrática, p=3*

$(k_N\ ,\ x^*)$	$(k_I\ ,\ x^*)$	$(k_{DL}\ ,\ x^*)$
$(7, x_8^*)$	$(16, x_3^*)$	$(6, x_8^*)$
$(128, x_9^*)$	$(15, x_3^*)$	$(134, x_9^*)$
$(127, x_9^*)$	$(14, x_3^*)$	$(133, x_9^*)$
$(9, x_8^*)$	$(12, x_8^*)$	$(9, x_8^*)$
$(9, x_8^*)$	$(11, x_8^*)$	$(9, x_8^*)$
$(98, x_{10}^*)$	$(31, x_{10}^*)$	$(97, x_{11}^*)$
$(99, x_{10}^*)$	$(29, x_{10}^*)$	$(99, x_{11}^*)$
$(99, x_{11}^*)$	$(17, x_3^*)$	$(99, x_{11}^*)$
$(70, x_{11}^*)$	$(11, x_3^*)$	$(70, x_{11}^*)$
$(65, x_{11}^*)$	$(16, x_3^*)$	$(64, x_{11}^*)$
$(16, x_{12}^*)$	$(47, x_3^*)$	$(170, x_{13}^*)$
$(101, x_{11}^*)$	$(17, x_3^*)$	$(101, x_{11}^*)$
$(15, x_{12}^*)$	$(21, x_8^*)$	$(15, x_{12}^*)$
$(12, x_{12}^*)$	$(14, x_3^*)$	$(13, x_{12}^*)$
$(12, x_{12}^*)$	$(11, x_{12}^*)$	$(12, x_{12}^*)$
$(172, x_{15}^*)$	$(16, x_{14}^*)$	$(172, x_{15}^*)$
$(13, x_8^*)$	$(16, x_{14}^*)$	$(13, x_8^*)$
$(156, x_{15}^*)$	$(27, x_{15}^*)$	$(155, x_{13}^*)$
$(136, x_{15}^*)$	$(1, x_{15}^*)$	$(136, x_{13}^*)$
$(166, x_{15}^*)$	$(11, x_{14}^*)$	$(166, x_{13}^*)$

Tabla 2: *Función Cuadrática, p=4*

$(k_N\ ,\ x^*)$	$(k_I\ ,\ x^*)$	$(k_{DL}\ ,\ x^*)$
$(21, x_3^*)$	$(11, x_5^*)$	$(14, x_5^*)$
$(22, x_3^*)$	$(8, x_5^*)$	$(15, x_5^*)$
$(20, x_3^*)$	$(7, x_5^*)$	$(13, x_5^*)$
$(21, x_3^*)$	$(7, x_5^*)$	$(14, x_5^*)$
$(20, x_3^*)$	$(8, x_5^*)$	$(13, x_5^*)$
$(15, x_6^*)$	$(5, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(14, x_6^*)$	$(6, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(15, x_6^*)$	$(6, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(15, x_6^*)$	$(5, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(15, x_6^*)$	$(6, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(15, x_6^*)$	$(5, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(16, x_6^*)$	$(14, x_6^*)$	$(12, x_6^*)$
$(21, x_8^*)$	NC	$(15, x_8^*)$
$(15, x_6^*)$	$(7, x_6^*)$	$(10, x_6^*)$
$(17, x_6^*)$	$(12, x_9^*)$	$(12, x_6^*)$
$(18, x_3^*)$	$(6, x_5^*)$	$(10, x_5^*)$
$(21, x_3^*)$	$(10, x_5^*)$	$(14, x_5^*)$
$(21, x_3^*)$	$(9, x_5^*)$	$(14, x_5^*)$
$(19, x_3^*)$	$(7, x_5^*)$	$(13, x_5^*)$
$(19, x_3^*)$	$(7, x_5^*)$	$(13, x_5^*)$

Tabla 3: *Función Hénon, p=3*

$(k_N\ ,\ x^*)$	$(k_I\ ,\ x^*)$	$(k_{DL}\ ,\ x^*)$
$(9, x_{10}^*)$	$(10, x_1^*)$	$(9, x_{10}^*)$
$(45, x_{12}^*)$	$(10, x_{10}^*)$	$(52, x_{11}^*)$
$(8, x_{10}^*)$	$(7, x_{10}^*)$	$(7, x_{10}^*)$
$(37, x_2^*)$	NC	$(10, x_{10}^*)$
$(9, x_{10}^*)$	$(9, x_{10}^*)$	$(8, x_{10}^*)$
$(20, x_1^*)$	$(7, x_{13}^*)$	$(26, x_{13}^*)$
$(22, x_1^*)$	$(6, x_3^*)$	$(29, x_{13}^*)$
$(23, x_1^*)$	$(8, x_{13}^*)$	$(28, x_{13}^*)$
$(21, x_1^*)$	$(7, x_3^*)$	$(28, x_{13}^*)$
$(40, x_{12}^*)$	$(8, x_{13}^*)$	$(28, x_{13}^*)$
$(44, x_{12}^*)$	$(9, x_{13}^*)$	$(30, x_{13}^*)$
$(31, x_{12}^*)$	NC	$(33, x_{13}^*)$
NC	$(16, x_{13}^*)$	$(33, x_{13}^*)$
$(41, x_{12}^*)$	$(12, x_{13}^*)$	$(28, x_{13}^*)$
$(40, x_{12}^*)$	NC	$(28, x_{13}^*)$
$(9, x_{10}^*)$	$(8, x_{10}^*)$	$(9, x_{10}^*)$
$(31, x_{11}^*)$	$(12, x_3^*)$	$(10, x_{10}^*)$
$(26, x_{11}^*)$	$(8, x_{14}^*)$	$(17, x_{14}^*)$
$(100, x_{11}^*)$	$(33, x_{10}^*)$	$(23, x_2^*)$
$(28, x_{11}^*)$	$(15, x_{14}^*)$	$(20, x_{14}^*)$

Tabla 4: *Función Hénon, p=4*

$(k_{NE}\,,\,x^*)$	$(k_{IE}\,,\,x^*)$	$(k_{DLE}\,,\,x^*)$
$(4, x_0^*)$	$(12, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(10, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$
$(10, x_0^*)$	$(12, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(8, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	NC
$(5, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(10, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$
$(7, x_0^*)$	$(10, x_0^*)$	NC
NC	$(10, x_0^*)$	$(12, x_0^*)$
NC	$(11, x_0^*)$	$(17, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$	$(13, x_0^*)$
$(10, x_0^*)$	$(15, x_0^*)$	$(10, x_0^*)$
$(13, x_1^*)$	$(10, x_7^*)$	$(10, x_1^*)$
$(9, x_4^*)$	$(5, x_7^*)$	$(7, x_1^*)$
$(7, x_0^*)$	$(11, x_7^*)$	$(10, x_0^*)$
$(10, x_1^*)$	$(5, x_7^*)$	$(9, x_1^*)$
$(3, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$

Tabla 5: *Función Especial, p=3*

$(k_N\,,\,x^*)$	$(k_I\,,\,x^*)$	$(k_{DL}\,,\,x^*)$
$(7, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$
$(9, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(14, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(10, x_0^*)$	$(12, x_0^*)$	$(16, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(18, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
NC	$(3, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(12, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(16, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(19, x_0^*)$	$(16, x_0^*)$	$(13, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(3, x_0^*)$	$(3, x_0^*)$	$(3, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$
$(12, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(12, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$

Tabla 6: *Función Especial, p=4*

$(k_N\,,\,x^*)$	$(k_I\,,\,x^*)$	$(k_{DL}\,,\,x^*)$
$(19, x_4^*)$	$(10, x_4^*)$	$(19, x_1^*)$
$(14, x_4^*)$	$(6, x_4^*)$	$(14, x_1^*)$
$(19, x_4^*)$	$(10, x_4^*)$	$(2, x_1^*)$
$(20, x_4^*)$	$(24, x_0^*)$	$(2, x_1^*)$
$(20, x_4^*)$	$(12, x_4^*)$	$(21, x_1^*)$
$(62, x_9^*)$	$(20, x_0^*)$	$(62, x_6^*)$
$(6, x_0^*)$	$(20, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(15, x_0^*)$	$(4, x_0^*)$
$(2, x_0^*)$	$(4, x_0^*)$	$(3, x_0^*)$
$(23, x_1^*)$	$(16, x_0^*)$	$(1, x_0^*)$
$(2, x_0^*)$	$(4, x_0^*)$	$(3, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$	$(3, x_0^*)$
$(4, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$
$(92, x_{30}^*)$	$(24, x_0^*)$	$(97, x_4^*)$
$(37, x_{29}^*)$	$(33, x_0^*)$	$(35, x_6^*)$
$(17, x_{29}^*)$	$(12, x_0^*)$	$(14, x_0^*)$
$(8, x_0^*)$	$(13, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(25, x_0^*)$	$(13, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(15, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$

Tabla 7: *Función Tinkerbel, p=3*

$(k_N\,,\,x^*)$	$(k_I\,,\,x^*)$	$(k_{DL}\,,\,x^*)$
$(9, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$
$(10, x_{26}^*)$	$(8, x_{26}^*)$	$(1, x_7^*)$
$(15, x_{26}^*)$	$(20, x_0^*)$	$(13, x_7^*)$
$(12, x_{26}^*)$	$(14, x_{26}^*)$	$(13, x_7^*)$
$(7, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$
$(2, x_0^*)$	$(4, x_0^*)$	NC
$(84, x_1^*)$	$(14, x_1^*)$	$(89, x_3^*)$
$(8, x_0^*)$	$(18, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$
$(157, x_{31}^*)$	NC	$(178, x_8^*)$
$(5, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$
$(8, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(7, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$
$(10, x_0^*)$	$(16, x_0^*)$	$(11, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(10, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$
$(9, x_{26}^*)$	$(10, x_{26}^*)$	$(1, x_7^*)$
$(41, x_{26}^*)$	$(17, x_0^*)$	$(12, x_0^*)$
$(2, x_0^*)$	$(4, x_0^*)$	$(3, x_0^*)$
$(5, x_0^*)$	$(9, x_0^*)$	$(5, x_0^*)$
$(6, x_0^*)$	$(13, x_0^*)$	$(6, x_0^*)$
$(8, x_0^*)$	$(14, x_0^*)$	$(8, x_0^*)$

Tabla 8: *Función Tinkerbel, p=4*

La dificultad, en cuanto a convergencia, se hace evidente en este conjunto de experimentos numéricos, en los casos $p = 7$ y $p = 9$. Esto no es sorprendente a la luz de la literatura sobre el tema que nos ocupa. Los resultados para dichos valores de p los presentamos en las tablas 9, 10, 11 y 12. Para cada uno de los valores de p y cada método, respectivamente, cada tabla muestra el número de puntos iniciales, de los 400 generados, que convergieron a un punto fijo de cada función, respectivamente. Adicionalmente, una tercera fila en cada tabla presenta la información del total de puntos fijos diferentes encontrados con cada método.

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=7	8	81	37
p=9	7	41	2
x^*	3	21	6

Tabla 9: *Función Hénon.*

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=7	12	34	11
p=9	4	7	4
x^*	2	5	4

Tabla 10: *Función Tinkerbel.*

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=7	53	70	58
p=9	65	70	68
x^*	15	21	14

Tabla 11: *Función Cuadrática.*

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=7	160	200	171
p=9	234	224	185
x^*	2	2	2

Tabla 12: *Función Especial.*

En las cuatro tablas anteriores podemos observar un mejor desempeño numérico de **ICUM** comparado con los otros dos métodos para periodos mayores, en este caso $p = 7$ y $p = 9$. Con estos resultados se decidió generar una muestra de mayor tamaño para hacer un análisis de la convergencia de los métodos para el periodo $p = 2$ y observar si el comportamiento de los métodos, exhibido para la muestra de tamaño 400, se mantiene y cómo cambia el tamaño del “basin” a medida que el periodo aumenta. En este caso se consideran $p = 2, 3, 7, 9$. Este análisis se realizó desde un punto de vista estadístico,. Su descripción y resultados se presentan a continuación.

3. Un análisis estadístico de convergencia

Con el fin de establecer otro criterio de comparación, que permitiera agrupar y analizar una mayor cantidad de datos, se generó en cada subregión un número suficiente de vectores aleatorios que permitieran tener una muestra de tamaño aceptable, y estimar un intervalo de confianza del 95 % para el número de iteraciones empleado por los métodos de **Newton, ICUM y DL** en converger a un punto fijo dado de periodo $p = 2$ en cada una de las funciones escogidas. Dichos intervalos, para cada una de las funciones, se presentan en las **Tablas 1, 2, 3** y **4** que aparecen a continuación, donde la primer columna indica la región del plano en la cual se encuentran los puntos iniciales generados y las columnas 2,3 y 4 presentan los intervalos de confianza estimados en cada una de las regiones y para cada uno de los métodos.

	Newton	**ICUM**	**DL**
R1	(3.7 , 3.9)	(8.0 , 8.7)	(7.1 , 7.7)
R2	(3.0 , 3.1)	(5.5 , 5.6)	(6.7 , 6.8)
R3	(3.6 , 3.7)	(6.1 , 6.3)	(7.0 , 7.0)
R4	(3.8 , 4.2)	(9.6 , 11.7)	(6.9 , 7.2)

Tabla 1: *Hénon.* $x_* = (-0{,}2733, 1{,}5733)$

	Newton	**ICUM**	**DL**
R1	(22.4 , 23.3)	(11.8 , 13.0)	(26.6 , 27.4)
R2	(21.8 , 22.5)	(10.5 , 11.8)	(26.3 , 26.6)
R3	(24.3 , 25.6)	(20.1 , 30.1)	(28.2 , 30.6)
R4	(24.0 , 25.1)	(18.3 , 24.4)	(27.7 , 28.6)

Tabla 2: *Tinkerbel.* $x_* = (-0{,}5274, 0{,}8874)$

	Newton	**ICUM**	**DL**
R1	(30.7 , 31.9)	(17.8 , 24.3)	(33.8 , 35.7)
R2	(26.1 , 27.0)	(11.2 , 13.1)	(30.7 , 31.7)
R3	(30.2 , 31.5)	(21.9 , 27.7)	(34.8 , 36.7)
R4	(29.7 , 31.4)	(19.9 , 22.6)	(34.6 , 36.7)

Tabla 3: *Cuadrática.* $x_* = (-0{,}9247, 0{,}8947)$

	Newton	**ICUM**	**DL**
R1	(4.8 , 5.1)	(10.9 , 11.8)	(11.1 , 11.4)
R2	(6.6 , 7.9)	(11.8 , 15.2)	(18.7 , 25.0)
R3	(6.2 , 7.0)	(9.0 , 10.3)	(13.8 , 16.2)
R4	(4.4 , 4.7)	(13.4 , 14.5)	(12.5 , 13.3)

Tabla 4: *Especial.* $x_* = (0{,}0\ ,\ 0{,}0)$

A partir de los resultados obtenidos se puede concluir que el método **DL** presentó en promedio el mayor número de iteraciones cuando se aplicó a cada una de las funciones escogidas. El método de Newton requirió en promedio un número menor de iteraciones que los otros dos métodos, en las funciones de Hénon y Especial, mientras que el método ICUM requirió menos iteraciones en las funciones Cuadrática y Tinkerbel.

Si el criterio de decisión para escoger el método a utilizar es el número de iteraciones se recomienda utilizar los métodos de **Newton** e **ICUM** con el fin de establecer cuál de los dos tiene un mejor comportamiento, ya que la elección depende también de la función. En esta selección del método a utilizar, es importante tener en cuenta que el método **ICUM** requiere un número menor de operaciones por iteración comparado con el método de **Newton**. Por tanto, si las diferencias entre estos dos métodos no son significativas , en cuanto a número de iteraciones se refiere, se recomienda el uso de **ICUM** por su rapidez en tiempo de cálculo.

En general, no se encontraron grandes diferencias en cuanto a número de iteraciones de una región a otra. Por tanto, la búsqueda se puede realizar en una sola región que incorpore las subregiones consideradas.

3.1. Determinación y comparación del tamaño del "basin"

Un segundo conjunto de experimentos tuvo como propósitos, en primer lugar: determinar el tamaño del "basin" de los puntos fijos obtenidos para cada una de las funciones mediante la estimación de la proporción de puntos iniciales que pertenecen a dicho "basin", y en segundo lugar: establecer comparaciones descriptivas de su tamaño a medida que el periodo aumenta. Para ello, se generaron, de manera aleatoria, 20.000 puntos en la región $[-3, 3] \times [-3, 3]$. Las **tablas 5, 6, 7** y **8** presentan los resultados obtenidos.

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=2	0.9224	0.9033	0.9329
p=3	0.5645	0.6059	0.5760
p=9	0.0014	0.0578	0.0022
p=10	0.0660	0.01200	0.0626

Tabla 1: *Función Hénon.*

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=2	0.6042	0.3360	0.5988
p=3	0.1852	0.0981	0.1892
p=9	0.0008	0.0024	0.00075
p=10	0.00035	0.0233	0.00035

Tabla 2: *Función Tinkerbel.*

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=2	0.6441	0.5237	0.5484
p=3	0.2284	0.2024	0.2299
p=9	0.0221	0.0311	0.0242
p=10	0.0081	0.0138	0.0059

Tabla 3: *Función Cuadrática.*

	Newton	**ICUM**	**DL**
p=2	0.1600	0.4533	0.2213
p=3	0.2291	0.3456	0.2773
p=9	0.1055	0.1399	0.1114
p=10	0.0946	0.1533	0.0986

Tabla 4: *Función Especial.*

Se observa que para órdenes superiores, $p = 9$, 10, el método **ICUM** tiene un "basin" de mayor tamaño en todas las funciones, mientras que para periodos pequeños, $p = 2$, 3, el tamaño del "basin" no presenta una tendencia especial con respecto al método aplicado. Para complementar el análisis anterior se presenta en las **figuras 1, 2, 3** y **4** el cambio en el tamaño del "basin" para $p = 2, 3, 9$ y 10 para las cuatro funciones consideradas. Cada una de las figuras tiene tres columnas: la primera muestra la variación del "basin" para dichos valores de p con el método de **Newton,** la segunda con el **ICUM** y la tercera con el método **DL.**

Figura 1: “Basin” para la función Hénon

Figura 2: “Basin” para la función Tinkerbel

Figura 3: “Basin” para la función Cuadrática

Figura 4: “Basin” para la función Especial

4. Conclusiones y recomendaciones

Se consideró el problema de encontrar puntos fijos de periodo p de órbitas periódicas de cuatro funciones tomadas de la literartura reciente, reformulado como un sistema de ecuaciones no lineales y para su solución los métodos de Newton [3] , Davidchack y Lai [2] e Inverso de actualización de Columna [7], con el objetivo de hacer un análisis numérico del comportamiento local de dichos métodos en la solución del problema para distintos valores de p. Además, para $p = 2, 3, 9$ y 10 se hizo una estimación del tamaño del "basin" de todos los puntos fijos encontrados por cada uno de los métodos. Este análisis permitió verificar la dificultad en la determinación de puntos de periodo p a medida que el tamaño de p aumenta .

En general, el método **ICUM** presentó un mejor desempeño comparado con los otros dos métodos, ya que requiere menos operaciones por iteración y el tamaño del "basin" a medida que p aumenta. Además es el método que localiza el mayor número de puntos fijos diferentes en la mayoría de los casos. Así, este método que es naturaleza cuasi-Newton respresenta una buena alternativa para la solución del problema. frente a las dificultades que presentan los otros dos métodos, tradicionalmente usados en la solución del problema mencionado.

Si el interés es localizar el mayor número de puntos fijos diferentes se recomienda utilizar los tres métodos, ya que el tener direcciones de búsqueda diferentes en la localización de dichos puntos conduce con frecuencia a puntos fijos diferentes.

La estimación por intervalos del número de iteraciones requeridas para encontrar un punto fijo permite hacer una compararación más objetiva del desempeño de los métodos, pero la búsqueda de un tamaño de muestra apropiado obliga algunas veces a generar aleatoriamente un número grande de semillas o puntos iniciales.

La estimación de la proporción de puntos pertenecientes al "basin" de un determinado punto fijo para un p dado, es una buena estimación del tamaño del "basin", si se calcula con un número grande de puntos iniciales (en este trabajo la estimación se realizó con 20000 puntos).

Referencias

[1] KLEBANOFF, A., Bolt, E. **[2001] Convergence Analysis of Davidchack and Lai's algorithm for finding periodic orbits**. *Chaos Solitons and Fractals* **12, 1305-1322.**

[2] DAVIDCHACK, R. L., Lai, Y-C., Klebanoff, A., Bolt, E. [2001] Towards complete detection of unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physics Letters A* **287, 99-104.**

[3] DENNIS, Jr. J. E., Schnabel R. B. [1983] Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. *Prentice-Hall*.

[4] DENNIS, Jr. J. E., More J. J. [1977] Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Review* **19, 46-89.**

[5] SCHMELCHER, P., Diakonos, F. K. [1997] *Physics Review Letters* **78, 4733.**

[6] LOPES, V. L. R. ; Martínez, J. M. [1995] Convergence properties of the inverse Column-Updating method, *Optimization Methods and Software* **6, 127-144.**

[7] MARTÍNEZ, J. M. [2000] Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **124, 97-121.**

[8] MARTÍNEZ, J. M., Zambaldi, M. C. [1992] An inverse column-updating method for solving large-scale nonlinear systems of Equations, *Optimization Methods and Software* **1, 129-140.**

[9] MILLER, J. R., Yorke, J. A. [2000] Finding all periodic orbits of maps using Newton methods: sizes of "basin"s. *Physica D* **135, 195-211.**

[10] PÉREZ, R., Lopes, V. L. R. [2001] Recent applications and numerical implementation of quasi-Newton methods for solving nonlinear systems of equations. *for appering in Applied Numerical Mathematics*.