

El método DL para resolver sistemas de ecuaciones no lineales

Ramiro Acevedo
Universidad del Cauca

Favián Arenas
Universidad del Cauca

Rosana Pérez
Universidad del Cauca

Recibido May. 10, 2007 Aceptado Ene. 18, 2008

Abstract

In a recent paper Davidchack and Lai [2001], proposed the DL method as an alternative to the deficiencies presented by the Newton method for finding period- p points of dynamical systems, when the value of p increases. This article presents a theoretical and numerical study of the performance of this method for solving any nonlinear system of equations. Theoretically, it is presented the local convergence analysis of method using common hypothesis in the analysis of Newton-type methods. Numerically, it is proposed a particular election of the parameter which is applied to an example. Some numerical tests using increasing values of parameter and four test function proposed in [Lukšan, L.,1998] complete this work.

Keywords: nonlinear systems of equations, quasi-Newton method, DL method.

MSC(2000): Primary: 34A34 , Secondary: 90C53.

Resumen

En un trabajo reciente Davidchack y Lai [2001], propusieron el método DL como una alternativa a las deficiencias que presenta el método de Newton para encontrar puntos de periodo p de sistemas dinámicos, cuando el valor de p aumenta. En este artículo se presenta un estudio teórico y numérico del desempeño de este método en la solución de cualquier sistema de ecuaciones no lineales. Teóricamente, se presenta el análisis de convergencia local del método usando hipótesis usuales en el análisis de métodos tipo Newton. Desde un punto de vista numérico, se propone una elección particular del parámetro del método, la cual se ilustra con un ejemplo. Algunos resultados numéricos del desempeño del método considerando valores crecientes del parámetro del problema y cuatro funciones de prueba propuestas en [Lukšan, L.,1998] complementan el trabajo.

Palabras y frases claves: sistemas no lineales, métodos de Newton, quasi-Newton y DL.

1 Introducción

En diversos problemas de ciencias e ingeniería, surge la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones no lineales, es decir se hace indispensable resolver el problema de encontrar, si es posible, un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga la ecuación

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una función no lineal y continuamente diferenciable [4] [8] [12].

Moré [10], reportó una colección de ejemplos prácticos los cuales incluyen, entre otros, problemas de estabilidad de aeronaves, ecuaciones de transferencia radiactiva, problemas elípticos de valor de frontera, el problema inverso de varas elásticas, problemas de potencia de flujos, discretización de problemas de evolución, problemas de equilibrio de plantas químicas. El alcance de las aplicaciones es

aún mayor si incluimos la familia de problemas de programación no lineal, ya que las condiciones de optimalidad de dichos problemas son sistemas de ecuaciones no lineales.

Uno de los métodos frecuentemente usados para resolver (1), por sus buenas propiedades de convergencia, es el tradicional método de Newton [4] [8]. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, una estimación inicial de la solución de (1), este método considera, en cada iteración, la aproximación

$$F(x) \approx L_k(x) \equiv F(x_k) + J(x_k)(x - x_k), \quad (2)$$

y x_{k+1} se define como la solución del sistema lineal $L_k(x) = 0$. Esta solución existe y es única si la matriz jacobiana de F en x_k , denotada $J(x_k)$, es no singular. Una iteración de este método es de la forma,

$$\begin{aligned} J(x_k)s_k &= -F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + s_k. \end{aligned}$$

Así, en cada iteración del método de Newton, se debe resolver un sistema de ecuaciones sistema lineales con matriz de coeficientes $J(x_k)$, lo cual, desde el punto de vista computacional es generalmente difícil y/o costoso.

Una alternativa al alto costo computacional que implica calcular la matriz jacobiana del sistema lineal newtoniano, en cada iteración, cuando es posible calcularla, la representan los métodos cuasi Newton. Estos métodos fueron creados con el objetivo de ser tan “eficientes” como el de Newton pero, más “baratos” computacionalmente. Una iteración cuasi Newton es,

$$\begin{aligned} B_k s_k &= -F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + s_k, \end{aligned}$$

donde la matriz B_k es una aproximación a la matriz jacobiana [4] [8] [3].

Si bien es cierto que desde el punto de vista computacional existen diferentes métodos para resolver (1), algunos muy conocidos, como el método de Newton y los métodos cuasi Newton, el método que se propone y estudia teórica y numéricamente, en el presente trabajo y el cual se basa en un algoritmo ideado para encontrar puntos de periodo p de sistemas dinámicos propuesto por Ruslan L. Davidchack y Ying-Cheng Lai [2], representa una alternativa interesante para considerar en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales en general, porque permite encontrar en los casos donde es posible, puntos solución distintos, simplemente variando la dirección de búsqueda mediante una técnica conocida como matriz de intercambio.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2, se introduce el método DL, exponiendo brevemente la naturaleza del problema para el cual surgió. En la Sección 3, se presenta el análisis de convergencia local del método DL en la solución de un sistema de ecuaciones no lineales. En la Sección 4, se propone una elección particular de un parámetro del problema y se ilustra con un ejemplo. Finalmente, en Sección 5 se presentan las conclusiones.

2 El método DL y el cálculo de órbitas periódicas

Dada una función $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se denomina órbita de H de orden p , del punto x_0 , al conjunto

$$\{x_0, H(x_0), H^2(x_0), \dots, H^p(x_0) \mid H^p(x_0) = x_0\}.$$

En este contexto se dice que un punto x_0 es estable si los puntos cercanos a él producen una órbita que conduce a x_0 , en otro caso el punto se denomina inestable [5].

Las órbitas periódicas juegan un papel fundamental en la explicación de dinámicas caóticas. Una buena definición de caos requiere de la existencia de un número infinito de órbitas periódicas [2].

Si se define la función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, como $F = H^p - I$, donde I es la matriz identidad de orden n , el cálculo de puntos fijos de periodo p de órbitas periódicas, se reduce a resolver, para cada p , un sistema de ecuaciones no lineales de la forma,

$$F(x) = 0. \quad (3)$$

El método de Newton es usado con frecuencia para resolver el sistema no lineal (3), debido a sus buenas propiedades de convergencia [4] [7] y el conjunto de puntos iniciales a partir de los cuales la sucesión generada por el método de Newton converge a una solución de (3) se denomina el “basin” de dicha solución [9]. Una dificultad de este método en la localización de órbitas periódicas se presenta a medida que el periodo p aumenta, dado que el número de puntos iniciales que convergen a una solución, llamado el tamaño del “basin” disminuye exponencialmente con el tamaño de dicho periodo [2] [9]. Ante esta dificultad, Schmelcher-Diakonos [13], proponen una variante del método de Newton, la cual amplía el tamaño del “basin” a medida que el periodo aumenta y la desventaja de convergencia lenta con dichos valores de p . Una iteración de este método es dada por

$$x_{k+1} = x_k + \lambda C F(x_k),$$

donde λ es un número positivo pequeño y C es una matriz de orden n , llamada *matriz de intercambio* o *matriz bandera*, cuyas componentes c_{ij} pertenecen al conjunto $\{-1, 0, 1\}$ y cada fila o columna contiene solamente un elemento no nulo [1] [5].

Observe que el método de Schmelcher-Diakonos usa una aproximación a la inversa de la matriz jacobiana de F , es decir es un método cuasi-Newton [3] [7] [8], y a la luz de la teoría de estos métodos es claro por qué la velocidad de convergencia disminuye. Con el uso de la matriz λC , la cual es no singular, se pueden generar diferentes direcciones que aseguran la localización de órbitas periódicas de cualquier orden. La desventaja respecto al método de Newton está en que la aproximación que se usa no tiene información de $J(x)$, ya que es constante.

Con el fin de conciliar las ventajas de los dos métodos mencionados anteriormente, Davidchack y Lai [1], proponen el algoritmo DL el cual se obtiene a partir del siguiente esquema:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda CF(x_{k+1}),$$

sustituyendo $F(x_{k+1})$ por su aproximación afín, dada en (2), se obtiene:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda CF(x_k) + \lambda CJ(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

haciendo $\lambda = 1/\beta$, se tiene que una iteración del método DL es dada por,

$$x_{k+1} = x_k + [\beta I - CJ(x_k)]^{-1} CF(x_k), \quad (4)$$

donde I es la matriz identidad de orden n , C es la matriz descrita en el método de Schmelcher-Diakonos y β es un número positivo. Además, Davidchack y Lai, modifican (4), usando el esquema iterativo

$$x_{k+1} = x_k + [\beta \|F(x_k)\| I - CJ(x_k)]^{-1} CF(x_k). \quad (5)$$

Geoméricamente, la matriz C establece direcciones que permiten encontrar diferentes soluciones del sistema (3). Algebráicamente, permite estabilizar la matriz jacobiana $J(x)$ en el sentido de que sus valores propios tengan parte real negativa [1] [13]. El factor $\|F(x_k)\|$ acelera la convergencia del método, garantizando que el esquema (5) tenga convergencia cuadrática, en contraste con la convergencia de (4) que sólo es lineal, como se verá en la sección siguiente.

En el caso unidimensional, el método DL es una variante del método de Newton que modifica la derivada de la función F en un valor constante e igual a β . El objetivo es que la recta tangente cambie de dirección, con el fin de forzar la convergencia en los casos en que la derivada F' tome valores cercanos a cero o valores muy grandes en vecindades de la raíz. Así, si la pendiente es grande, se debe buscar disminuir la inclinación de la recta tangente, y si la recta tangente es casi paralela al eje x , se busca aumentar su pendiente. Por lo tanto, el método DL genera una secuencia de rectas secantes cuyas pendientes son la modificaciones de las rectas tangentes respectivas [11].

3 Análisis de convergencia

En esta parte se presenta el análisis de convergencia local del método DL en la solución de ecuaciones no lineales (**Teorema 3.4**). Este análisis se realiza, tomando las hipótesis usuales de los métodos tipo Newton [3] [4] [8]. Además, se presenta un resultado análogo para la convergencia del esquema iterativo (4) (**Teorema 3.5**), en el cual se nota el papel que juega el factor $\|H(x_k)\|$ en la rapidez de convergencia de la iteración (5). Se inicia este estudio mostrando tres resultados que se usarán en las demostraciones de los teoremas mencionados.

En lo que sigue, el símbolo $\|\cdot\|$ denotará una norma matricial inducida por alguna norma en \mathbb{R}^n , es decir,

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|I\| = 1,$$

donde, A, B , e I son matrices de orden n con I la matriz identidad.

Lema 3.1. ([4], pág. 45) Sean A, B, C matrices reales de orden n .

1. Si $\|A\| < 1$, entonces $(I - A)^{-1}$ existe y se tiene

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (6)$$

2. Si B es no singular y $\|B^{-1}(C - B)\| < 1$, entonces C es no singular y se tiene

$$\|C^{-1}\| \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B^{-1}(C - B)\|}. \quad (7)$$

Lema 3.2. ([4], pág. 75) Si la matriz jacobiana $J(x)$ existe para todo x en un subconjunto abierto y convexo D de \mathbb{R}^n y si existe una constante $\gamma > 0$ tal que para todo $x, y \in D$, $\|J(x) - J(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$, entonces para todo $x, y \in D$ se cumple que

$$\|F(x) - F(y) - J(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2.$$

Lema 3.3. ([5], pág. 1309) Existen $2^n n!$ matrices de intercambio de orden n . Además, si C es una matriz bandera de orden n , entonces la matriz C es invertible, $C^{-1} = C^T$, $\|C\| = 1$ y $\|Cx\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en un subconjunto abierto y convexo D de \mathbb{R}^n . Para $\beta > 0$ y C una matriz de intercambio de orden n , se define la matriz

$$M(x) = \beta s(x)I - CJ(x),$$

donde $s(x) = \|F(x)\|$, I es la matriz identidad de orden n y $J(x)$ es la matriz jacobiana de F en x .

Si $x_* \in D$ y r, α, γ son constantes positivas tales que

i) $F(x_*) = 0$

ii) $N(x_*, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_*\| \leq r\} \subseteq D$

iii) $M(x_*)^{-1}$ existe y $\|M(x_*)^{-1}\| \leq \alpha$

iv) $J(x) \in Lip_\gamma(N(x_*, r))$.

Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x_0 \in N(x_*, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_*\| \leq \varepsilon\}$ la sucesión generada por

$$x_{k+1} = x_k + M(x_k)^{-1}CF(x_k) \quad (8)$$

está bien definida, converge a x_* y además, existe una constante $\mu > 0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \mu \|x_k - x_*\|^2. \quad (9)$$

Demostración. Puesto que F es continua en x_* , existe $\delta > 0$ tal que

$$s(x) = \|F(x)\| < \frac{1}{8\alpha\beta} \text{ siempre que } \|x - x_*\| < \delta.$$

Sean $\varepsilon = \min\left\{r, \delta, \frac{1}{4\gamma\alpha}, \frac{1}{2\gamma}\right\}$ y $x_0 \in N(x_*, \varepsilon)$.

En primer lugar se demostrará por inducción que la sucesión generada por (8) está bien definida y que para cada k se satisface la desigualdad,

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{1}{2} \|x_k - x_*\|. \quad (10)$$

Nótese que la desigualdad (10) implica la convergencia de la sucesión (8) a x_* y que $x_k \in N(x_*, \varepsilon)$ para todo k .

Haciendo uso de las hipótesis (iii) y (iv) y del 3.3 se tiene

$$\begin{aligned} \|M(x_*)^{-1}[M(x_0) - M(x_*)]\| &\leq \alpha \|M(x_0) - M(x_*)\| \\ &= \alpha \|\beta s(x_0)I + C[J(x_*) - J(x_0)]\| \\ &\leq \alpha\beta s(x_0) + \alpha \|J(x_*) - J(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{8} + \alpha\gamma \|x_* - x_0\| \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 3.1, $M(x_0)^{-1}$ existe y en consecuencia x_1 está bien definido y además,

$$\|M(x_0)^{-1}\| \leq \frac{\|M(x_*)^{-1}\|}{1 - \|M(x_0)^{-1}[M(x_0) - M(x_*)]\|} \leq \frac{\|M(x_*)^{-1}\|}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2\alpha.$$

Así, por el Lema 3.2 y puesto que $s(x_0) < \frac{1}{8\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_*\| &= \|x_0 - x_* + M(x_0)^{-1}CF(x_0)\| \\
&= \|x_0 - x_* + M(x_0)^{-1}C[F(x_0) - F(x_*)]\| \\
&\leq \|M(x_0)^{-1}C\| \|F(x_0) - F(x_*) + C^T M(x_0)(x_0 - x_*)\| \\
&\leq 2\alpha \|F(x_0) - F(x_*) + C^T(\beta s(x_0)I - CJ(x_0))(x_0 - x_*)\| \\
&= 2\alpha \|C^T\beta s(x_0)(x_0 - x_*) + F(x_0) - F(x_*) - J(x_0)(x_0 - x_*)\| \\
&\leq 2\alpha\beta s(x_0) \|x_0 - x_*\| + \frac{\gamma}{2} \|x_0 - x_*\|^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \|x_0 - x_*\| + \frac{\gamma}{2} \|x_0 - x_*\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} \|x_0 - x_*\|\right) \|x_0 - x_*\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|x_0 - x_*\| ,
\end{aligned}$$

con lo cual, se verifica (10) para $k = 0$. Nótese que en la última desigualdad se usa que $\|x_0 - x_*\| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\gamma}$. El paso inductivo se demuestra de manera similar y de esta forma todas las desigualdades se verifican para cualquier k , en particular,

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq 2\alpha\beta s(x_k) \|x_k - x_*\| + \frac{\gamma}{2} \|x_k - x_*\|^2. \quad (11)$$

Para demostrar (9), nótese que

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_k\| &\leq \|x_{k+1} - x_*\| + \|x_k - x_*\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|x_k - x_*\| + \|x_k - x_*\| \\
&= \frac{3}{2} \|x_k - x_*\| ,
\end{aligned}$$

además, de (8), se tiene

$$CF(x_k) = M(x_k)(x_{k+1} - x_k) = [\beta s(x_k)I - CJ(x_k)](x_{k+1} - x_k),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
s(x_k) &= \|CF(x_k)\| \\
&\leq [\beta \|s(x_k)\| + \|J(x_k)\|] \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\leq \left[\frac{1}{8\alpha} + \|J(x_k)\|\right] \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\leq \frac{3}{2} \left[\frac{1}{8\alpha} + \|J(x_k)\|\right] \|x_k - x_*\|
\end{aligned} \quad (12)$$

pero,

$$\begin{aligned} \|J(x_k)\| &\leq \|J(x_k) - J(x_*)\| + \|J(x_*)\| \\ &\leq \gamma \|x_k - x_*\| + \|J(x_*)\| \\ &\leq \gamma\varepsilon + \|J(x_*)\| = \eta \end{aligned}$$

y así,

$$s(x_k) \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{8\alpha} + \eta \right) \|x_k - x_*\|,$$

luego, de (11) se sigue que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq 3\alpha\beta \left(\frac{1}{8\alpha} + \eta \right) \|x_k - x_*\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|x_k - x_*\|^2 = \mu \|x_k - x_*\|^2$$

donde $\mu = 3\alpha\beta \left(\frac{1}{8\alpha} + \eta \right) + \frac{\gamma}{2}$. \square

Teorema 3.5. *Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en un subconjunto abierto y convexo D de \mathbb{R}^n . Para $\beta > 0$ y C una matriz de intercambio de orden n se define la matriz*

$$M(x) = \beta I - CJ(x)$$

donde, I es la matriz identidad de orden n y $J(x)$ es la matriz jacobiana de F en x .

Si $x_* \in D$ y r, α, γ son constantes positivas que cumplen las hipótesis (i)–(iv) del **Teorema 3.4**, entonces, para $\beta < \frac{1}{4\alpha}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x_0 \in N(x_*, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_*\| \leq \varepsilon\}$ la sucesión generada por

$$x_{k+1} = x_k + M(x_k)^{-1}CF(x_k) \quad (13)$$

está bien definida, converge a x_* y satisface

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \mu \|x_k - x_*\| + \rho \|x_k - x_*\|^2 \quad (14)$$

donde μ y ρ son constantes positivas.

Demostración. Se demostrará por inducción sobre k que la sucesión generada por (13) está bien definida, verifica (14) y satisface la desigualdad (10).

Sean $\mu = 2\alpha\beta$ y $\rho = \frac{\gamma}{2} \varepsilon = \min \left\{ r, \frac{1}{2\alpha\gamma}, \left(\frac{1}{2} - \mu \right) / \rho \right\}$ y $x_0 \in N(x_*, \varepsilon)$. Por el **Lema 3.3**, se tiene que

$$\begin{aligned} \|M(x_*)^{-1} [M(x_0) - M(x_*)]\| &\leq \alpha \|M(x_0) - M(x_*)\| \\ &= \alpha \|C [J(x_*) - J(x_0)]\| \\ &= \alpha \|J(x_*) - J(x_0)\| \\ &\leq \alpha\gamma \|x_* - x_0\| \leq \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Luego, por el **Lema 3.1**, $M(x_0)^{-1}$ existe y en consecuencia x_1 está bien definido y además,

$$\|M(x_0)^{-1}\| \leq \frac{\|M(x_*)^{-1}\|}{1 - \|M(x_0)^{-1} [M(x_0) - M(x_*)]\|} \leq \frac{\|M(x_*)^{-1}\|}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2\alpha.$$

Así, por el **Lema 3.2**,

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_*\| &= \|x_0 - x_* + M(x_0)^{-1}CF(x_0)\| \\ &= \|x_0 - x_* + M(x_0)^{-1}C[F(x_0) - F(x_*)]\| \\ &\leq \|M(x_0)^{-1}C\| \|F(x_0) - F(x_*) + C^T M(x_0)(x_0 - x_*)\| \\ &\leq 2\alpha \|F(x_0) - F(x_*) + C^T(\beta I - CJ(x_0))(x_0 - x_*)\| \\ &= 2\alpha \|C^T\beta(x_0 - x_*) + F(x_0) - F(x_*) - J(x_0)(x_0 - x_*)\| \\ &\leq 2\alpha\beta \|x_0 - x_*\| + \|F(x_0) - F(x_*) - J(x_0)(x_0 - x_*)\| \\ &\leq 2\alpha\beta \|x_0 - x_*\| + \frac{\gamma}{2} \|x_0 - x_*\|^2 \\ &= \mu \|x_0 - x_*\| + \rho \|x_0 - x_*\|^2, \end{aligned}$$

lo que demuestra (14) para $k = 0$. Además, de $\|x_0 - x_*\| \leq \varepsilon \leq (\frac{1}{2} - \mu) / \rho$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_*\| &\leq \mu \|x_0 - x_*\| + \rho \|x_0 - x_*\|^2 \\ &= (\mu + \rho \|x_0 - x_*\|) \|x_0 - x_*\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_0 - x_*\|, \end{aligned}$$

luego, para $k = 0$ se verifica (10). El paso inductivo se demuestra en forma similar. \square

4 Pruebas numéricas: una propuesta para la elección de β

A partir de (4), se tiene que una iteración del método DL es de la forma

$$\begin{aligned} (CJ(x_k) - \beta I)s_k &= -CF(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + s_k, \end{aligned}$$

así, en cada iteración, se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes sugiere una forma de elegir, en cada iteración, el parámetro β : escogerlo ligeramente mayor que el radio espectral de la matriz $CJ(x_k)$.

Esto garantiza no sólo que el algoritmo esté bien definido pues en cada iteración la matriz $(CJ(x_k) - \beta I)$ es no singular, sino que da una primera idea hacia la globalización del método [4]. Efectivamente, es ésta la propuesta de elección de β .

En la implementación numérica del método, inicialmente se escogen puntos iniciales arbitrarios y posteriormente los puntos iniciales son generados aleatoriamente. El valor de β considerado es el radio espectral de la matriz $CJ(x_k)$ incrementado en 0.1. Los códigos de los algoritmos y funciones fueron escritos en SCILAB 3.0, y hechos en un computador con procesador AMD Athlon(tm) de 1.10 GHz.

Se utilizó como criterio de convergencia $\|F(x_k)\| < 10^{-6}$. Se suspendió la búsqueda en el algoritmo cuando el número de iteraciones excedió 500 iteraciones o $\|F(x_k)\| > 10^2$. En el último caso diremos que el método diverge.

Con el fin de ilustrar numéricamente la propuesta de elección de β , se considera el siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$\begin{aligned} 2 + \operatorname{sen}(x) - y &= 0 \\ 2(x+2)e^{-(x-1)^2} - y &= 0 \end{aligned}$$

y las ocho matrices intercambio correspondientes a $n = 2$,

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & C_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & C_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & C_7 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & C_4 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & C_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & C_8 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Inicialmente, se resolvió el sistema con la matriz intercambio C_1 y con el vector inicial $x_0 = (1, 2.6)$. En este caso, el método DL converge en 31 iteraciones a $x_* = (0.167229, 2.166459)$. La Figura 1 (a), permite visualizar el punto solución y algunos puntos de la sucesión convergente generada por el método DL. Además, se implementó el método DL generado a partir de (5), al cual se hará referencia en lo que sigue como método DL modificado. En este caso, se obtiene convergencia a x_* en 17 iteraciones. Lo cual, es de esperarse a la luz de la teoría de convergencia desarrollada en la sección anterior.

Posteriormente, y para ilustrar una de las bondades del método DL, se cambió la matriz de intercambio por C_3 y se consideró el mismo punto inicial. El método converge en 26 iteraciones a $x_* = (2.007147, 2.906299)$, que corresponde a la otra solución del sistema no lineal (Figura 1 (b)). Con las otras matrices de intercambio los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1.

Para un tercer grupo de pruebas numéricas, los puntos iniciales fueron generados aleatoriamente en el intervalo $I = [-1, 3] \times [1, 3]$. Para cada uno de estos puntos, se resolvió el sistema no lineal usando los métodos DL y DL modificado. La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos para el valor inicial $x_0 = (1.6615244, 2.2567836)$ y para cada una de las matrices intercambio correspondientes a $n = 2$.

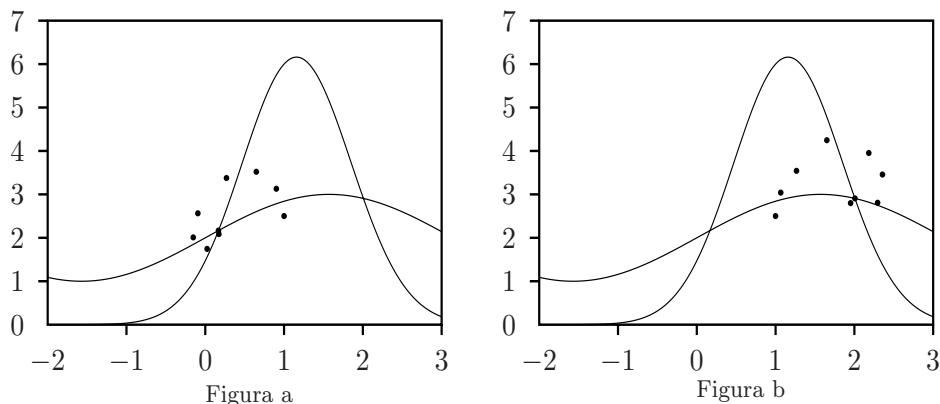


Figura 1: Convergencia del método DL a dos soluciones distintas.

matriz	x_*	iter.
C_1	(0.1672295, 2.1664508)	31
C_2	no converge	500
C_3	(2.0071477, 2.9062993)	26
C_4	(0.1672295, 2.1664508)	44
C_5	no converge	500
C_6	no converge	500
C_7	(0.1672295, 2.1664508)	31
C_8	no converge	500

Cuadro 1: Convergencia del método DL variando la matriz intercambio.

	DL		DL modificado	
matriz	x_*	iter.	x_*	iter.
C_1	no converge	500	(0.167230, 2.166452)	19
C_2	(2.007147, 2.906299)	42	(2.007147, 2.906299)	8
C_3	(2.007147, 2.906299)	24	(2.007147, 2.906299)	8
C_4	(0.167230, 2.166452)	51	(0.167230, 2.166452)	7
C_5	(2.007147, 2.906299)	31	(2.007147, 2.906299)	8
C_6	no converge	500	no converge	500
C_7	(0.167230, 2.166452)	33	no converge	500
C_8	no converge	500	(0.167230, 2.166452)	8

Cuadro 2: Comparación, en iteraciones, de los métodos DL y DL modificado.

Esta tabla permite observar el efecto de la modificación en el método DL en lo relacionado a convergencia. Claramente se visualiza el impacto de la convergencia

lineal del método DL frente a la convergencia cuadrática del DL modificado.

A partir de la teoría sobre el método DL se deduce que el valor del parámetro β debe ser pequeño. Se realizó una exploración numérica en esta dirección. Para ello, se utilizó un grupo de cuatro funciones no lineales que hacen parte de los problemas de prueba propuestos por Lukšan y Vlček [6], los cuales provienen de aplicaciones prácticas que derivan en sistemas de ecuaciones no lineales. La formulación analítica de cada uno de estos problemas puede encontrarse de manera explícita en [6]. Los problemas que se utilizaron son los siguientes: sistema trigonométrico exponencial (**P1**), problema singular de Broyden (**P2**), problema jacobiano estructurado (**P3**), problema de valor de frontera discreta (**P4**).

Para cada uno de estos problemas, se fijó $n = 5$ con lo cual, existen 3840 matrices de intercambio. Para cada una de estas matrices, se consideraron los valores de β que se consignan en la siguiente tabla.

β	P1	P2	P3	P4
0.2	751	3834	3840	3840
2	91	811	459	3840
5	47	14	98	2671
15	8	1	46	630
30	1	1	27	150

Cuadro 3: Relación de β con la convergencia del método DL.

En la tabla se relaciona β con el número total de matrices de intercambio con las que se obtuvo convergencia. En la Tabla 3, se observa que a medida que β crece el número de matrices de intercambio con las que se consigue convergencia disminuye. No obstante, con este pequeño grupo de funciones se puede observar la variedad de direcciones que el método proporciona para localizar la solución.

5 Conclusiones

Se propone el método DL para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en general y se hace su análisis de convergencia local a la luz de la teoría de los métodos tipo Newton. Se propone una elección del parámetro del método, la cual se aplica a un ejemplo. Además, se presentan algunos resultados del desempeño del método considerando valores crecientes del parámetro del problema y cuatro funciones de prueba propuestas en [6].

Cabe destacar que aún quedan tareas por realizar tanto a nivel teórico como numérico. Algunas de éstas se mencionan a continuación.

Continuar con el estudio del desempeño del método aumentando la cantidad de funciones de prueba utilizadas y analizar la relación que existe entre el parámetro β , y el número de iteraciones que requiere el método para la convergencia. En esta parte se debe tener en cuenta, el número de soluciones distintas al problema que

se consiguen con un único parámetro β , considerando todas las posibles matrices de intercambio.

Realizar el trabajo propuesto en el párrafo anterior, pero fijando ahora una matriz de intercambio y considerando varios valores del parámetro β .

Implementar el método DL, para valores grandes de n . El inconveniente en esta parte es el gran costo computacional que implica generar las $2^n n!$ matrices de intercambio.

Introducir en el algoritmo una estrategia de globalización y realizar el análisis teórico y numérico correspondiente.

Agradecimientos Los autores agradecen al evaluador del artículo por la revisión cuidadosa del mismo y por sus valiosas sugerencias y observaciones.

Referencias

- [1] Davidchack, R. L. y Lai, Y. C.: Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physics Review Letters E*. 60 (1999) 61-72.
- [2] Davidchack, R. L., Lai, Y. C., Klebanoff, A. and Bolt, E.: Towards complete detection of unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physics Letters A*. 287 (2001) 99-104.
- [3] Dennis, J. E. y More, J. J.: Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*. 19 (1977) 46-89.
- [4] Dennis, J. E. y Schnabel, R. B.: Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Prentice-Hall, New Jersey, 1983.
- [5] Klebanoff, A. y Bolt, E.: Convergence Analysis of Davidchack and Lai's algorithm for finding periodic orbits. *Chaos Solitons and Fractals*. 12 (2001) 1305-1322.
- [6] Lukšan, L. y Vlček, J.: Sparse and partially separable test problems for unconstrained and equality constrained optimization. Institute of Computer Science Academy of Sciences of the Czech Republic. Technical report. 767, ICS AS CR, 1998.
- [7] Martínez, J. M.: Algorithms for solving nonlinear systems of equations. Continuous optimizations: The state of art. Spedicato Kluwer, 1994.
- [8] Martínez, J. M.: Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 124 (2000) 97-121.

- [9] Miller, J. R. y Yorke, J. A.: Finding all periodic orbits of maps using Newton methods: sizes of basins. *Physica D.* 135 (2000) 195-211.
- [10] More, J. J.: A collection of nonlinear model problems. *Lectures in Applied Mathematics.* 26 (1990) 723-762.
- [11] Plaza, A. M. y Pérez, R.: Un estudio numérico de métodos tipo Newton para encontrar puntos de periodo p de sistemas dinámicos. *Unicauca Ciencia.* 7 (2004) 116-130.
- [12] Ortega, J. M. y Rheinbolt, W. G.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* Academic Press, New York, 1970.
- [13] Schmelcher, P. y Diakonov, F. K.: A general approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems. *Physics Review.* 57 (1998) 2739-2746.

Dirección de los autores

Ramiro Acevedo — Universidad del Cauca

e-mail: racevedo@unicauca.edu.co

Favián Arenas — Universidad del Cauca

e-mail: farenas@unicauca.edu.co

Rosana Pérez — Universidad del Cauca

e-mail: rosana@unicauca.edu.co